（Ⅰ－85)

非線形システムの初期通過確率の定式化

武蔵工業大学　正会員　星谷　勝
武蔵工業大学　正会員　丸山　収
武蔵工業大学　学生員〇熊井博司

1. はじめに

動的外乱を受ける構造物の安全性を議論する場合には，外乱が作用している全継続時間中に応答値が規定された一定値を超えない確率を定量的に評価する必要がある．これは，応答が一定値を越えたら限界状態に達したという基準で安全性を算定するものであり，初期通過確率を算出することに集約できる．

本研究は，星谷が提案している非線形構造システム初期通過確率の準解析解算定手法[1]の精度向上を目的として，非ガウス型結合密度関数を等価ガウス結合確率密度関数に近似する手法の検討を行う．この目的のために，対象システムをホワイトノイズ入力による非線形状態方程式および線形観測方程式に定式化し，状態方程式を等価ガウス変換により線形化し，カルマンフィルタに適用するための定式化を行った．

2. 問題の設定

本研究では，次式で与えられる１自由度非線形振動方程式を対象として，系の応答があるしきい値を超える確率，すなわち初期通過確率を定量的に求めることを目的とする．

$$\ddot{x}(t) + 2h\omega_o\dot{x}(t) + \omega_o{}^2\phi(\dot{x}(t), x(t)) = -w(t) \tag{1}$$

ここで，h：減衰係数，ω_o：固有円振動数，$\phi(\dot{x}(t), x(t))$：非線形復元力特性および$w(t)$：ガウス性ホワイトノイズである．式(1)は，状態空間表示をすることにより，１階のベクトル微分方程式に変換することが出来る．

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{f}[t, \mathbf{z}(t)] + \mathbf{G}w(t) \tag{2}$$

ここで，$\mathbf{z}(t)$：応答ベクトル$x(t)$および$\dot{x}(t)$で構成される状態ベクトル，$\mathbf{f}[t,\mathbf{z}(t)]$：非線形関数である．

非線形構造システム初期通過確率の準解析解算定手法の詳細については，参考文献（１）に委ねるが，式(2)をもとに有限個のサンプルを発生し，非線形応答の時系列データをカルマンフィルタの観測データとして，状態ベクトルの最適推定値および推定誤差共分散を求め，２つの隣接する時刻kと$k+1$の２時刻間の共分散関数を求める．これらを用いて，時刻kと$k+1$のガウス結合確率密度関数を作成し，破壊領域において積分することで初期通過確率を算定することが可能となる．しかしながら，式(2)のシステムが非線形であるため入力特性がガウス性であっても，出力$\mathbf{z}(t)$が容易にその特性を把握できない非ガウス性となることが本質的な難しさとなっている．すなわち，等価なガウス結合確率密度関数に精度良く近似することが重要となり，出力$\mathbf{z}(t)$から等価ガウス性密度関数の特性を規定する最適推定値，共分散行列を推定する問題に帰着する．

3. 偽線形確率微分方程式の誘導[2]

線形システムの場合は，作用する外乱がガウス確率過程である限り，推定値および共分散関数により完全に記述され，カルマンフィルタは理論解を与える．しかしながら，非線形推定理論の場合，無限次元のモーメントに関する情報を必要とするために，厳密な非線形フィルタは実現不可能であり，何らかの近似を用いる必要がある．一般に用いられている近似法は，式(2)における非線形関数を最適推定値のまわりでテーラ展開する方法である．拡張カルマンフィルタは，推定値のまわりで１次項までの近似を行ったものであるが，誤差共分散の計算は，カルマンフィルタのアルゴリズムを用いている．また，２次項まで展開するシュバルツ・バスフィルタ（二次モーメントフィルタ）等もあるが，アルゴリズムが非常に複雑となる欠点がある．ここでは，式(2)を等価ガウス変換による偽線形確率微分方程式に表現し，カルマンフィルタの状態方程式に用いることとした．式(2)における非線形関数を次式のように展開する．

キーワード：初期通過確率，カルマンフィルタ，動的信頼性

連絡先：〒158-8557　世田谷区玉堤 1-28-1，TEL 03-3703-3111　FAX 03-5707-2187

$$\mathbf{f}[t,\mathbf{z}(t)] = \mathbf{a}(t) + \mathbf{B}(t)\{\mathbf{z}(t) - \hat{\mathbf{z}}(t)\} + \mathbf{e}(t) \tag{3}$$

式(3)における$\mathbf{e}(t)$は，展開を第２項まででうち切ったすべての誤差を集めたものである．$\mathbf{a}(t)$および$\mathbf{B}(t)$は，非線形システムの応答時系列$\mathbf{Y}_t$が観測されたという条件のもとで，$\mathbf{e}(t)$の条件付き自乗期待値が最小となるように決定される．

$$E[\mathbf{e}(t)\mathbf{e}(t)^T|\mathbf{Y}_t] = E[\{\mathbf{f}[t,\mathbf{z}(t)] - \mathbf{a}(t) - \mathbf{B}(t)(\mathbf{z}(t) - \hat{\mathbf{z}}(t))\}\{\mathbf{f}[t,\mathbf{z}(t)] - \mathbf{a}(t) - \mathbf{B}(t)(\mathbf{z}(t) - \hat{\mathbf{z}}(t))\}^T|\mathbf{Y}_t] \to \min. \tag{4}$$

式(4)の最小化により次式を得る．

$$\mathbf{a}(t) = \int \mathbf{f}[t,\mathbf{z}(t)]P[\mathbf{z}(t)|\mathbf{Y}_t]d\mathbf{z}(t) = E[\mathbf{f}[t,\mathbf{z}(t)]|\mathbf{Y}_t] \tag{5}$$

$$\mathbf{B}(t) = E[(\mathbf{f}[t,\mathbf{z}(t)] - \hat{\mathbf{f}}[t,\mathbf{z}(t)])(\mathbf{z}(t) - \hat{\mathbf{z}}(t))^T|\mathbf{Y}_t]\mathbf{P}(t|t)^{-1} \tag{6}$$

上式では条件付き確率密度関数：$P[\mathbf{z}(t)|\mathbf{Y}_t]$が必要となるが，ここでは未知の平均値$\hat{\mathbf{z}}(t|t)$，分散$\mathbf{P}(t|t)$を有するガウス型と仮定する．本研究では，等価ガウス結合密度関数を求めることを目的としているために式(7)を仮定したが，式(7)の充足度が推定結果の精度に影響を与える．

$$P[\mathbf{z}(t)|\mathbf{Y}_t] = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}|\mathbf{P}(t|t)|^{-\frac{1}{2}}\exp[-\frac{1}{2}(\mathbf{z}(t) - \hat{\mathbf{z}}(t))^T\mathbf{P}(t|t)^{-1}(\mathbf{z}(t) - \hat{\mathbf{z}}(t))] \tag{7}$$

非線形項は$\mathbf{f}[t,\mathbf{z}(t)] \cong \mathbf{a}(t) + \mathbf{B}(t)\{\mathbf{z}(t) - \hat{\mathbf{z}}(t)\}$と等価ガウス線形関係式に近似されて次式となる．

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{a}(t) + \mathbf{B}(t)(\mathbf{z}(t) - \hat{\mathbf{z}}(t)) + \mathbf{G}w(t) \tag{8}$$

次に，非線形復元力特性として Bouc and Wen モデルを採用して，具体的に$\mathbf{a}(t)$および$\mathbf{B}(t)$を求める．

$$\dot{\phi}(\dot{x}(t),x(t)) = A\dot{x}(t) - \beta|\dot{x}(t)||\phi(\dot{x}(t),x(t))|^{n-1}\phi(\dot{x}(t),x(t)) - \gamma\dot{x}(t)|\phi(\dot{x}(t),x(t))|^{n} \tag{9}$$

ここで，A，β，γ：履歴特性をコントロールするパラメータである．

例えば$n=1$として，$\mathbf{z}(t) = [x(t)\ x(t)\ \phi(\dot{x}(t),x(t))]^T = [z_1(t)\ z_2(t)\ z_3(t)]^T$と状態空間表示すると，式(2)に対応して次式を得る．

$$\mathbf{f}[t,\mathbf{z}(t)] = \begin{bmatrix} f_1[t,\mathbf{z}(t)] \\ f_2[t,\mathbf{z}(t)] \\ f_3[t,\mathbf{z}(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2(t) \\ -2h\omega z_2(t) - \omega^2 z_3(t) \\ Az_2(t) - \beta|z_2(t)|z_3(t) - \gamma z_2(t)|z_3(t)| \end{bmatrix} \quad (10)(a) \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)(b)$$

式(10)から，式(5)-(7)を用いて$\mathbf{a}(t)$および$\mathbf{B}(t)$を求める．ここで，$\hat{z}$は最適推定値であり，P_{ij}は共分散行列$\mathbf{P}(t|t)$のｉ行ｊ列成分を表す．

$$\mathbf{a}(t) = \left|\begin{array}{c} \hat{z}_2(t) \\ \hline -2h\omega\hat{z}_2(t) - \omega^2\hat{z}_3(t) \\ \hline A\hat{z}_2(t) - \beta|\hat{z}_2(t)|\hat{z}_3(t) - \gamma\hat{z}_2(t)|\hat{z}_3(t)| \\ +\frac{1}{2}\mathrm{trace}[\mathbf{P}(t|t)\frac{\partial^2 f_3[t,\mathbf{z}(t)]}{\mathbf{z}(t)^2}] \end{array}\right| \tag{11}$$

ここで，

$$\frac{\partial^2 f_3[t,\mathbf{z}(t)]}{\mathbf{z}(t)^2} = \left|\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\beta\frac{|\hat{z}_2(t)|}{\hat{z}_2(t)} - \gamma\frac{|\hat{z}_3(t)|}{\hat{z}_3(t)} \\ \hline 0 & -\beta\frac{|\hat{z}_2(t)|}{\hat{z}_2(t)} - \gamma\frac{|\hat{z}_3(t)|}{\hat{z}_3(t)} & 0 \end{array}\right|$$

$$\mathbf{B}(t) = \left|\begin{array}{c|c|c} P_{12} & P_{12} & P_{23} \\ \hline -2h\omega P_{12} - \omega^2 P_{13} & -2h\omega P_{22} - \omega^2 P_{23} & -2h\omega P_{23} - \omega^2 P_{33} \\ \hline P_{12}(A - \beta\frac{|\hat{z}_2|}{\hat{z}_2}\hat{z}_3 - \gamma|\hat{z}_3|) & P_{22}(A - \beta\frac{|\hat{z}_2|}{\hat{z}_2}\hat{z}_3 - \gamma|\hat{z}_3|) & P_{23}(A - \beta\frac{|\hat{z}_2|}{\hat{z}_2}\hat{z}_3 - \gamma|\hat{z}_3|) \\ +P_{13}(-\beta|\hat{z}_2| - \gamma\hat{z}_2\frac{|\hat{z}_3|}{\hat{z}_3}) & +P_{23}(-\beta|\hat{z}_2| - \gamma\hat{z}_2\frac{|\hat{z}_3|}{\hat{z}_3}) & +P_{33}(-\beta|\hat{z}_2| - \gamma\hat{z}_2\frac{|\hat{z}_3|}{\hat{z}_3}) \end{array}\right| \mathbf{P}(t|t)^{-1} \tag{12}$$

4. カルマンフィルタへの定式化

カルマンフィルタに対する状態方程式は，式(8)で与えられる．観測方程式は，観測量が式(2)からシミュレートされる$[x(t)\ x(t)\ \phi(\dot{x}(t),x(t))]$の時系列とすれば，次式で与えられる．

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{z}(t) + \mathbf{V}(t) \tag{13}$$

ここで，$\mathbf{H}$：(3x3)の単位行列，$\mathbf{V}(t)$：平均値０のガウス白色雑音である．式(13)は線形関係で与えられるので，状態方程式の偏位項$\mathbf{z}(t) - \hat{\mathbf{z}}(t)$を考慮して，カルマンフィルタのアルゴリズムが適用できる．また式(11)および(12)より$\mathbf{a}(t)$および$\mathbf{B}(t)$は，最適推定値と推定誤差共分散を含んだ関数となっているので，カルマンフィルタのアルゴリズムから求められる結果を取り込みながら，逐次計算を行っていく必要がある．

参考文献：(1).M.Hoshiya：and K.Komiya: Pseudo Analytical Method for Stochastic Nonlinear Systems, Proc. of Fourth Int. Conf. on Stochastic Structural Dynamics-SSD'98, pp.187-196, August, 1998.
(2).砂原善文：確率システム理論Ⅱ，朝倉書店，１９８２年．