(Ⅰ－78)　一次元地盤応答解析における波動的手法に関する一考察

東電設計　正会員　松原勝己

1.まえがき　地中構造物の耐震設計を実施する際には，地震時の地盤変位を推定することが重要課題となる．構造物周辺地盤が成層構造を有する場合には，波動的手法によって地震時地盤変位を予測することが多い．その際，(1)成層構造における振動数領域での波動方程式を用い地表面および層境界における境界条件を満足するように解を求める方法（境界値問題）と，(2)時間領域において層境界での波動の反射・透過による振幅の変化および位相ずれを考慮して波動の重ね合わせを行う方法（波線理論）がある．(1)の方法は，解析コードSHAKE［Schnabel et al.(1972)］などに具体化され，実務で頻繁に用いられている．一方，(2)の方法は小林・鏡味(1966)が具体的なアルゴリズムを提案しており，現状の実務で用いられる頻度は少ないが，方法の直観的理解が容易であるという利点がある．これら 2 つの方法の関連性に関しては，金井(1969)が(1)の方法から(2)の方法の導入を，佐藤(1978)が(2)の方法から(1)の方法の導入を試みている．本報では，2 層系地盤を対象として，伝達関数のフーリエ逆変換を直接的に評価することによって得たインパルス応答の解釈を通し，上記 2 つの方法の関係を明確にしようとするものである．

2.基本方程式と伝達関数　図-1 に示す弾性 2 層系地盤を考え，基盤から上方へせん断波が入射するものとする．また，地盤の内部減衰は無視するものとする．表層および基盤の絶対変位を $u_{Ak}(z_k, t)$（k=1,2）としたとき，運動方程式（波動方程式）は次式で表される．

$$\rho_k \partial^2 u_{Ak}(z_k,t)/\partial t^2 - G_k \partial^2 u_{Ak}(z_k,t)/\partial z_k^2 = 0 \quad (1)$$

ここに，ρ_k（k=1,2）：表層および基盤の密度，G_k（k=1,2）：表層および基盤のせん断弾性係数　である．

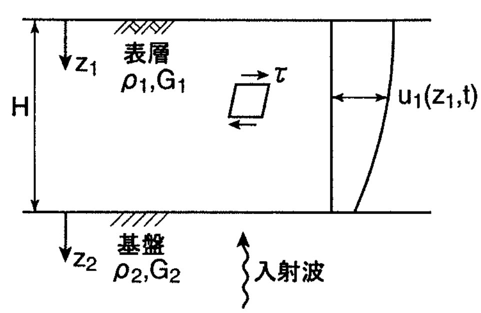

図-1　解析モデル

式(1)を振動数領域に置き換えるために，$u_{Ak}(z_k, t)=U_{Ak}(z_k, \omega)e^{i\omega t}$と置けば，式(2)を得る．

$$d^2U_{Ak}(z_k, \omega)/dz_k^2 + (\omega/Vs_k)^2U_{Ak}(z_k, \omega) = 0 \quad (2)$$

ここに，Vs_k(k=1,2)：表層および基盤のせん断波速度（$Vs_k^2=G_k/\rho_k$）である．式(2)の解は，式(3)で与えられ，また境界条件は地表面および基盤上で式(4)で指定されるので，式(3)の任意定数 A_k および B_k のうち A_2 を既知（入射波の振幅）として A_1, B_1 および B_2 を定めることができる．

$$U_{Ak}(z_k, \omega) = A_k\exp(i\omega z_k/Vs_k) + B_k\exp(-i\omega z_k/Vs_k) \quad (3)$$

$$z_1 = 0 \text{ で } \tau_1 = G_1\partial U_{A1}/\partial z_1 = 0 \quad (4a) \qquad z_1 = H(z_2=0) \text{ で } U_{A1} = U_{A2} \quad (4b)$$

$$z_1 = H(z_2=0) \text{ で } \tau_1 = G_1\partial U_{A1}/\partial z_1 = \tau_2 = G_2\partial U_{A2}/\partial z_2 \quad (4c)$$

以上より，基盤の入射加速度に対する地表面加速度の伝達関数 $H(\omega)$は，式(5)で表される．

$$H(\omega) = 2A_1/A_2 = 2/\{\cos(a\omega) + i\alpha\sin(a\omega)\} \quad (5)$$

ここに，$a = H/Vs$, $\alpha=(\rho_1Vs_1)/(\rho_2Vs_2)$（基盤に対する表層の波動ｲﾝﾋﾟｰﾀﾞﾝｽ比）である．

3.インパルス応答　地表面における加速度のインパルス応答 h(t)は，式(5)の伝達関数 $H(\omega)$のフーリエ逆変換で表されるから，式(6)が成立する．

$$h(t) = 1/(2\pi)\int H(\omega)e^{i\omega t}d\omega \quad (6)$$

式(6)を評価するために，ωを複素数 z(=x+iy)とし，H(z)の特異点の位置（H(z)の分母がゼロとなる(x,y)）を調べる．この時，(x,y)は式(7)を満足する必要がある．

キーワード：地盤応答，成層地盤，波動，一次元，境界値問題，波線理論

連絡先（住所：〒110-0015 東京都台東区東上野 3-3-3　TEL：03-5818-7793　FAX：03-5818-7608）

$$\cos(ax)\{\cosh(ay)-\alpha\sinh(ay)\}=0 \quad (7a)$$

$$\sin(ax)\{\alpha\cosh(ay)-\sinh(ay)\}=0 \quad (7b)$$

$\tanh(ay)<1$ であり, $\cos(ax)$ と $\sin(ax)$ を同時にゼロにできないことを考慮すれば, $\alpha<1$（基盤の波動ｲﾝﾋﾟｰﾀﾞﾝｽが表層のそれより大きい場合）のとき, 式(8)が成立する.

$$\cos(ax)=0 \quad (8a) \qquad \tanh(ay)=\alpha \quad (8b)$$

式(8)より, 伝達関数の特異点 $z_j(j=\pm1,\pm2,\cdots)$ は式(9)で表され, その位置は, 図-2 に示すように上半平面に存在する.

$$z_j=x_j+iy_j=\pi/2a\cdot(2j-1)+i\beta \quad (9a)$$

$$\tanh(a\beta)=\alpha \quad (9b)$$

$t>0$ に対するインパルス応答 $h(t)$ を評価するために, 図-2 の実軸と Γ_1 に沿う複素積分を考える. 半径 $R\to\infty$ のとき Γ_1 沿う積分がゼロになることから, 式(10)が成立する.

$$h(t)=i\,\Sigma\,\mathrm{Res}_{(z=zj)}H(z)e^{izt} \quad (10)$$

ここに, $\mathrm{Res}_{(z=zj)}$ は $z=z_j$ における留数である. 式(10)および式(9a)より, 式(11)を得る.

$$h(t)=\Sigma\,4Vs/H\cdot(-1)^{j-1}e^{-\beta t}/\{\cosh(a\beta)-\alpha\sinh(a\beta)\}\cdot\sin\{\pi Vs/(2H)\cdot(2j-1)t\} \quad (11)$$

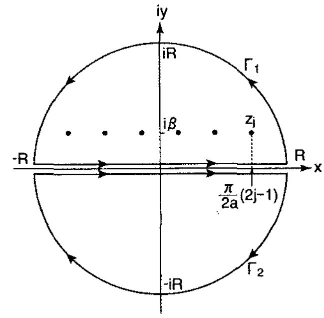

図-2 特異点の位置

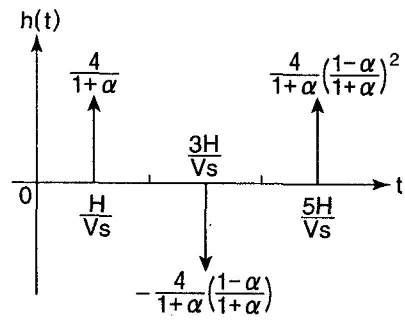

図-3 インパルス応答

さらに, 式(9b)および公式［今井(1981)］ $\Sigma(-1)^{j-1}\sin\{\pi Vs/(2H)\cdot(2j-1)t\}=H/Vs\,\Sigma(-1)^{j-1}\delta\{t-H/Vs\cdot(2j-1)\}$ を考慮すれば, 式(12)が得られる. ここに, $\delta\{\cdot\}$ はディラックのデルタ関数である.

$$h(t)=\Sigma\,4/(1+\alpha)\cdot\{-(1-\alpha)/(1+\alpha)\}^{j-1}\cdot\delta\{t-H/Vs\cdot(2j-1)\} \quad (t>0) \quad (12)$$

また, $t<0$ に対するインパルス応答は, 図-2 の実軸と Γ_2 に沿う複素積分を考えると, 下半平面に特異点がなく $R\to\infty$ で Γ_2 に沿う積分がゼロになることから, $h(t)=0$ が示される.

式(12)において $\delta\{t-H/Vs\cdot(2j-1)\}$ の項は, 図-3 に示すように, 基盤から表層に入射したインパルスが表層内での透過・反射を繰り返し, $H/Vs\cdot(2j-1)$（$j=1,2,\cdots$）の時刻で地表面上に発生する応答と解釈できる. さらに, $2/(1+\alpha)$ が基盤から表層に上昇するせん断波の透過係数を, $\{-(1-\alpha)/(1+\alpha)\}$ が表層から基盤に下降するせん断波の反射係数を表す［片山ら(1979)］ことから, $4/(1+\alpha)\cdot\{-(1-\alpha)/(1+\alpha)\}^{j-1}$ の項は,基盤と表層間の波動の透過・反射に伴う振幅の時間的変化（逸散効果）を表すものと解釈できる. 以上から,伝達関数のフーリエ逆変換の直接的な評価から得たインパルス応答は, 波線理論的な解釈と照応することが示された.

4.あとがき 本報では, 一次元地盤応答を求めるための波動的手法である境界値問題として扱う方法と波線理論的な方法の 2 者の関係を明らかにするため, 2 層系地盤を対象として伝達関数のフーリエ逆変換の直接的な評価から求めたインパルス応答により議論を行った. その結果, インパルス応答は波線理論的な解釈に照応することが示され, 上記 2 者の方法が理論上等価であることが明らかとなった.

＜参考文献＞1)Schnabel,P.B.,Lysmer,J.,Seed,H.B.(1972)：SHAKE,A Computer Program for Earthquake Response Analysis of Horizontally Layered Sites,EERC72-12,Univ. of California 2)小林啓美・鏡味洋史(1966)：波動理論を用いた成層構造の地震応答数値解析法について,第 2 回日本地震工学シンポジウム,pp.15-20 3)金井清(1969)：地震工学,大学講座土木工学,pp.66-72,共立出版 4)佐藤泰夫(1978)：弾性波動論,pp.65-66,岩波書店 5)今井功(1981)：応用超関数論,pp.184,サイエンス社 6)片山恒雄・宮田利雄・国井隆弘（1979)：土木学会編・新体系土木工学 10 構造物の振動解析,pp.151-152 ,技報堂出版