

(I - 77) 軸力衝撃問題における波動解析と振動解析の等価性に関する検討

防衛大学校 学生会員 ○別府万寿博 正会員 香月智 フェロー 石川信隆
山口大学 正会員 宮本文穂

1. 緒言

衝撃問題を解析的に検討する場合、解析手法、解析モデルの要素分割数あるいは時間積分における時間刻みの影響により数値解が異なる。特に波動伝播の追跡が重要な問題では、波動方程式が空間的に不連続な解をもつにもかかわらず、数値解析モデルは空間的にある程度の連続性を前提として定式化されているため、①圧力波の波頭のなまり、②過渡的な過大な波頭、③波頭後方の数値上の振動などが誤差として生じることが指摘されている。本研究は、1次元衝撃問題の中でも完全不連続性を有する問題を例にとり、波動論と振動論による解析解を求めたうえで、ばね-質点系モデル法を波動伝播解析へ適用する際の離散化の条件について検討したものである。

2. 波動論と振動論による衝撃突き上げを受ける棒部材の衝撃応答

図-1 に示す等断面のコンクリート棒部材の下端に時間 $t=0$ で衝撃速度 $v_0 = 50\text{cm/s}$ が作用する衝撃突き上げ問題を例にとり、波動解析と振動解析による解析解を求める。棒の高さ、材料定数を表-1 に示す。

表-1 下端固定棒の材料定数

棒の高さ L	$5.0 \times 10^3\text{cm}$
断面積 A	$1.96 \times 10^5\text{cm}^2$
橋脚の弾性係数 E	$3.0 \times 10^4\text{N/mm}^2$
密度 ρ	$2.55 \times 10^{-9}\text{N} \cdot \text{s}^2/\text{mm}^4$

2. 1 棒部材の下端に作用する変位速度の変化

棒部材の下端に時間 $t=0$ で衝撃速度 v_0 が作用した場合、時間の経過とともに柱下端の変位速度（粒子速度） v ($=\partial u/\partial t$, u :柱下端の変位)は小さくなると思われる。そこで、解析に先立ち柱下端の変位速度の変化を求める。いま、柱下端に圧縮応力波 $\sigma = -\rho cv$ が作用するものとする。これを後述する波動方程式(2)に代入すると速度の変化率

は $\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dx}(-cv)$ となる。さらに柱の長さ L にわたり積分し、

初期条件 $t=0$ のとき $v=v_0$ を用いると、柱下端における変位速度が次のように得られる。

$$v = v_0 \exp\left(-\frac{ct}{L}\right) \quad (1)$$

2. 2 波動論と振動論による軸力分布の比較

図-2 を参照して、任意の時刻 t における位置 x の軸方向変位を u 、材料の弾性係数を E とすると、微小要素に作用する x 方向の力の動的釣合により次のような波動方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2)$$

ただし、 $c (= \sqrt{E/\rho})$: 波動伝播速度、 E : 棒材料の弾性

係数、 ρ : 棒材料の密度。

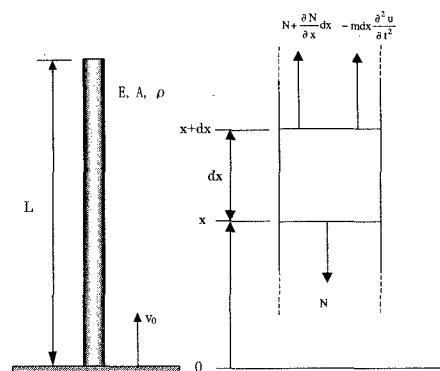


図-1 解析モデル 図-2 微小要素の力の釣合い

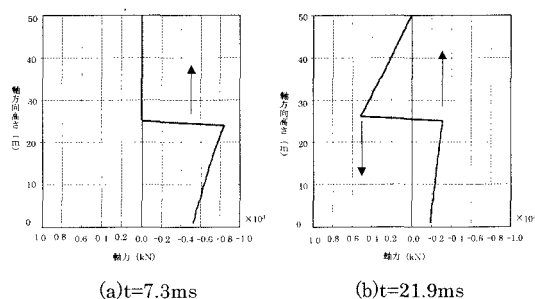


図-3 波動論による軸力分布

キーワード: ばね-質点系モデル 応力波、波動解析、振動解析

連絡先(横須賀市走水 1-10-20 TEL: 0468-41-3810 FAX: 0468-44-5913)

棒の下端における圧縮軸力 $N(x=0, t)$ は式(1)より,

$$N(0, t) = \sigma A = -\rho c v_0 A = -\rho c v_0 A \exp\left(-\frac{ct}{L}\right) \text{ で与えられるので, 任意の位置 } x \text{ における軸力は次式で与えられる.}$$

$$t < t_0 \text{ のとき: } N(x, t) = -\rho c v_0 A \exp\left[\frac{1}{L}(x-ct)\right] \quad (3a)$$

$t \geq t_0$ のとき:

$$N(x, t) = -\rho c v_0 A \left\{ \exp\left[\frac{1}{L}(x-ct)\right] - \exp\left[\frac{1}{L}(L-x-c(t-t_0))\right] \right\} \quad (3b)$$

次に, 振動解析による解析解は, 本問題の自由振動モードは両端自由の柱の問題となるため, $x=0$ および $x=L$ で常に応力がゼロであることを考慮すると, 境界条件は $x=0$ で $\phi(0)=0$, $x=L$ で $\phi(L)=0$ となる. これより, 振動モード形 $\phi(x)$ と n 次のモード振幅 $q(t)$ はそれぞれ次式で与えられる.

$$\phi_n(x) = B_2 \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (4a)$$

$$q_n(t) = -\frac{2c v_0}{L} \frac{1}{\omega_n^2 + \left(\frac{c}{L}\right)^2} \left[\frac{c}{\omega_n L} \sin \omega_n t - \cos \omega_n t + \exp\left(-\frac{ct}{L}\right) \right] \quad (4b)$$

$$\text{ただし, } \omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{EA}{m}}.$$

また軸力分布は, 次式で求められる.

$$N(x, t) = EA \frac{\partial u}{\partial x} = EA \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n'(x) q_n(t) \quad (5)$$

式(3), (5)より求まる軸力分布をそれぞれ図-3 および図-4 に示す. 図-3(a)は, 柱が突き上げられた後 $t=7.3\text{ms}$ の軸力分布を示しており, 棒下端から棒半分の高さまで圧縮軸力が伝播している. 図-3(b)は, $t=21.9\text{ms}$ 時の軸力分布を示しており, 時間 $t=14.6\text{ms}$ で自由端反射した引張軸力が柱半分まで伝播している様子がわかる. 図-4 の振動解析結果は, 振動モード次数を 50 次まで考慮した場合であるが, 波動論による解析結果とほぼ完全に一致していることがわかる.

3. ばね-質点系モデル法による解析結果

先と同じ例題をばね-質点系モデル法により数値解析を行う. ここで, 計算の時間刻みは解析モデルの要素長に応じて Courant 条件による時間刻みとした. 要素分割数 30 および 50 のときの軸力分布をそれぞれ図-5, 図-6 に示す. 図-5 の要素分割数が 30 の場合は, 軸力波形をさほど精度良く表現できていないことがわかる. 一方, 要素分割数を 50 にすると数値誤差と思われる振動がみられるが, 振動中心は波動解となっており, 軸力急変部でも波動解にほぼ一致することがわかる. 本例題は完全な不連続性を有し, 無限大の周波数成分を含む軸力問題であることから, 1 次元の衝撃問題をばね-質点系モデルにより解析する場合は, Courant 条件を満足し, かつ要素分割数を 50 以上にすると精度良く解析できることがわかる.

参考文献

1) 土木技術者のための振動便覧, 土木学会, p.217, 1985 年 10 月.

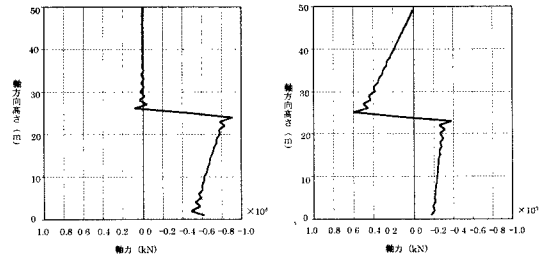


図-4 振動論による軸力分布 (n=50)

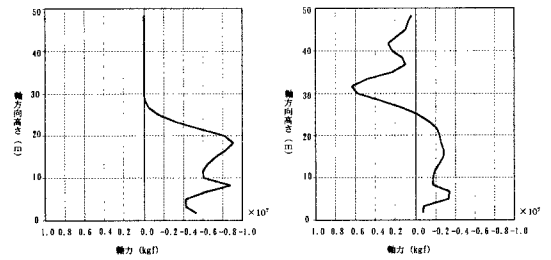


図-5 ばね-質点系モデルによる軸力分布 (要素分割数: 30)

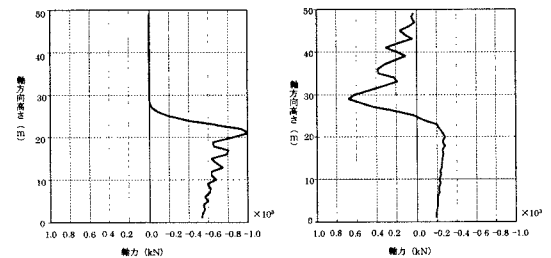


図-6 ばね-質点系モデルによる軸力分布 (要素分割数: 50)