(Ⅰ－35)　浅水長波流れの陰的安定化有限要素法における各種反復解法の比較

中央大学　学生員　○町田　哲
日本工営株式会社　正会員　桜庭雅明
中央大学　正会員　樫山和男

1. はじめに

近年，有限要素法を用いた浅水長波流れ解析において，高精度かつ安定に計算する手法として，流線方向にのみ風上差分の考え方を取り入れたSUPG (Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin) 法[1)2)]を適用した安定化有限要素法が数多く用いられている．この方法は，未知量の係数行列が非対称となり陰的解法が用いられているため，陽解法に比べて計算時間と記憶容量が多大となる実用上の問題点が生じる．これらの問題を解決するために連立一次方程式の解法には，省メモリーなElement-by-Element処理に基づく反復解法[3)4)]，特に前処理付き共役勾配法が多く用いられている．

本報告では，これまで提案されている前処理付き共役勾配法に対してElement-by-Element処理を施し，どの前処理付き共役勾配法が浅水長波流れ解析において有効であるかを，計算時間(反復回数)および計算機容量の点から比較検討した．

2. 基礎方程式

基礎方程式として以下の式(1)に示す保存型の非線形，非定常の浅水長波方程式を用いる．

$$\frac{\partial U}{\partial t}+A_i\frac{\partial U}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij}\frac{\partial U}{\partial x_j}\right)=R \quad in \quad \Omega \qquad (1)$$

ここに，U，R，A_i，$K_{ij,}$は以下に示す通りである．

$$U=\begin{bmatrix} H \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} H \\ Hu \\ Hv \end{bmatrix}, R=\begin{bmatrix} 0 \\ gH\frac{\partial h}{\partial x_1}-\frac{(\tau)_1}{\rho} \\ gH\frac{\partial h}{\partial x_2}-\frac{(\tau)_2}{\rho} \end{bmatrix}$$

$$A_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2-u^2 & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ c^2-v^2 & 0 & 2v \end{bmatrix}$$

$$K_{11}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2\frac{\nu u}{H} & 2\frac{\nu}{H} & 0 \\ \frac{\nu u}{H} & 0 & \frac{\nu}{H} \end{bmatrix}, K_{12}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu u}{H} & \frac{\nu}{H} & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{21}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu v}{H} & 0 & \frac{\nu}{H} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, K_{22}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu u}{H} & \frac{\nu}{H} & 0 \\ -2\frac{\nu v}{H} & 0 & 2\frac{\nu}{H} \end{bmatrix}$$

ここに，u，vはそれぞれx_1，x_2方向の流速成分，Hは全水深$(h+\zeta)$，ζは水位変動量，hは初期水深，gは重力加速度，cは波速$(=\sqrt{gH})$，$(\tau)_i$は底面せん断応力，νは動粘性係数，ρは密度を表す．

3. 有限要素定式化

空間方向の離散化には，安定化有限要素法の一つであるSUPG法に基づく重み付き残差法を用いる．また，要素には三角形一次要素を適用する．

時間方向の離散化にはCrank-Nicolson法を適用し最終的に得られる有限要素方程式は以下の式(2)になる．

$$\left(M_f+\frac{\Delta t}{2}(S_i+B_i)\right)U^{n+1}-\frac{\Delta t}{2}H_iR^{n+1} = \left(M_f-\frac{\Delta t}{2}(S_i+B_i)\right)U^n+\frac{\Delta t}{2}H_iR^n \qquad (2)$$

ここに，M_fは質量マトリックス，S_iは移流項に関するマトリックス，B_iは拡散項に関するマトリックス，H_iは外力項に関するマトリックスを表す．

4. 反復解法

反復解法は，定常的な解法と非定常的な解法に分類されるが，本報告では非定常的な解法の中で大規模計算に最もよく用いられている共役勾配法に着目する．比較した手法は，①双共役勾配法（BiCG法），②2乗共役勾配法（CGS法），③安定化双共役勾配法（Bi-CGSTAB法），④GPBi-CG法，⑤Bi-CGSTAB2法の5種類の反復解法である．各手法の詳細は，例えば文献(3)を参照されたい．なお本報告では，Element-by-Element処理を施したこれらの5種類の反復解法が浅水長波流れの有限要素解析に対して，計算時間（反復回数）及び計算機容量の観点で，どの解法が有効であるか比較検討を行うものとした．

5. 数値解析例

数値解析例として，図–1に示すような一様斜面上の孤立波遡上問題を取り上げる．解析領域及び初期条件は図–1に示すとおりであり，境界条件は矩形水路であることを仮定して側方の境界にslip条件を与えた．なお，本研究では要素分割と反復解法の違いによる，計算時間（CPU時間），方程式求解に生じる平均反復回数及び実行時の計算機容量（ファイルサイズ）を比較するために表–1に示すような有限要素分割のケースについて計算した．計算条件としては，$\Delta t=0.25$として100ステップ25秒後まで計算させた．計算で使用した計算機の仕様は表–2に示すとお

Key Word: 安定化有限要素法，浅水長波流れ，反復解法
〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27
TEL 03-3817-1815,FAX 03-3817-1803

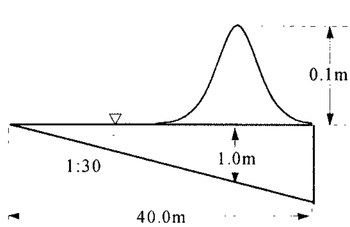
りである．**表–1**のうち，MeshSにおける有限要素分割図は**図–2**に示すとおりである．

解析結果として，計算時間（CPUTIME）と節点数の関係を**図–3**に，平均反復回数と節点数の関係を**図–4**に示す．さらに，実行ファイルサイズと節点数の関係を**図–5**に示す．**図–3**から，計算時間に関してはBi-CGSTAB法，GPBi-CG法，Bi-CGSTAB2法において差異は見られず，また節点数の増加に伴いBiCG法，CGS法は他の3手法より増加することがわかる．**図–4**から平均反復回数に関しても，Bi-CGSTAB法，GPBi-CG法，Bi-CGSTAB2法において差異は見られず，節点数の増加に伴いBiCG法，CGS法は他の3手法より増加していることがわかる．**図–5**から，各解法での実行ファイルサイズに関しては，節点数とほぼ比例関係にあり，解法の違いによる差異は見られないことがわかる．

6. おわりに

本報告では，解析例に一様斜面上の孤立波遡上問題を用いて，有限要素法による浅水長波流れ解析における連立一次方程式の解法として，5種類の前処理付き共役勾配法を適用し各手法の特徴を，計算時間（反復回数）及び計算機容量（実行ファイルサイズ）の面から比較検討した．その結果，以下の結論を得た．

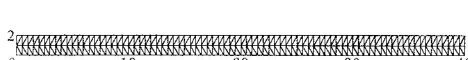
- 計算時間に関しては，反復回数の少ない安定化双共役勾配法（Bi-CGSTAB法），GPBi-CG法，Bi-CGSTAB2法が有利であることが明らかになった．特に大規模問題になるほどそれらの手法の有効性が顕著である．
- 計算機容量（実行ファイルサイズ）に関しては，今回比較した5種類の反復法においてほぼ同一であることが明らかになった．



$$\zeta = \frac{a_0}{cosh^2(3\sqrt{a_0}(x-1/\alpha)/2)}, u = -\frac{\zeta(1+a_0/2)}{\alpha x + \zeta}$$

$$a_0 = 0.1(m), \alpha = 1/30, g = 1.0(m/s^2)$$

図–1　解析領域及び初期条件図



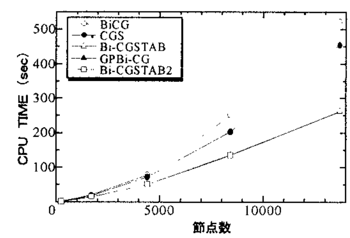
図–2　有限要素分割図（mesh S）

表–1　使用した有限要素分割

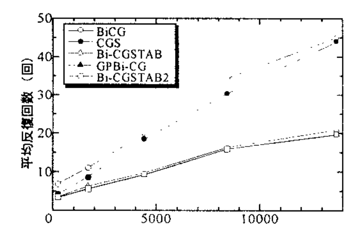
	節点数	要素数
MeshSS	243	320
MeshS	1687	2880
MeshM	4411	8000
MeshL	8415	15680
MeshLL	13699	25920

表–2　計算機仕様

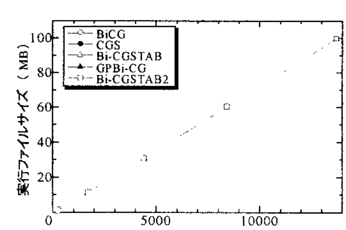
	RS/6000 SP
CPU	POWER 3 (200MHz)
命令Cache	32KB
DataCache	64KB
Level 2 Cache	4MB
Memory	512MB



図–3　計算時間と節点数の関係



図–4　平均反復回数と節点数の関係



図–5　実行ファイルサイズと節点数の関係

参考文献

1) 萱野論，樫山和男：安定化Space-Time有限要素法による移動境界を考慮した浅水長波流れ解析：第12回数値流体力学シンポジウム講演論文集，pp261-262，1998
2) S.W.Bova and G.F.Carey : A symmetric formulation and SUPG scheme for the shallow water equations : *Advances in Water Resources* : Vol.19, No.3, pp123-131, 1996
3) Richard Barrett, Michael Berry, Tony F.Chan, James Demmel, June Donato, Jack Dongarra, Vector Eijkhout, Roldan Pozo, Charles Romine, Henk van der Vorst：長谷川里見，長谷川秀彦，藤野清次 訳：反復法　Templates：朝倉書店
4) 藤野清次，張紹良：反復法の数理：朝倉書店