(I −34)　ＶＯＦ法を用いたＴＧＦＥＭによる自由表面解析

東海大学大学院　学生会員　小川　直哉
東海大学　学生会員　田中　修
東海大学　正会員　島崎　洋治

1．はじめに

非圧縮性を持つ流体の非定常解析には、マーカー法やＶＯＦ法（密度関数法）等が用いられる[1)]。これらの方法は自由表面を有する比較的ゆっくりとしたクリープ流にも応用され、ポリマー、ゴム、土及びセメントなどの流れ解析に用いられている。

ＶＯＦ法は、流体の有る無しを示す密度関数を解く方法で、自由表面を追跡するための簡単な方法のひとつである。本研究では、この関数の移流方程式を精度良く解くための、９節点アイソパラメトリック要素を使った、有限要素法によるテイラー・ガラーキン法[2)]を検証する。

例題として、自重で崩壊するコンクリートのスランプ試験に相当する軸対称問題の流動解析を行う。

2．支配方程式

非定常・非圧縮のクリープ流の支配方程式は次のように表される。

運動方程式：$\rho u_{i,t} = \sigma_{ji,j} + b_i$　(1)

連続方程式：$u_{i,i} = \varepsilon_{ii} = 0$　(2)

構成方程式：$\varepsilon_{ij} = \left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)/2$　(3)

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij}' \quad (4)$$

$$\sigma_{ij}' = 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (5)$$

境界条件　：$u_i = \overline{u}_i$　(6)

$$v_j\sigma_{ij} = \overline{T}_i \quad (7)$$

ここにρは密度、u_iは速度ベクトル、σ_{ij}は応力テンソル、σ_{ij}'は偏差応力テンソル、pは圧力、μは粘性係数及びb_iは物体力である。式(6)･(7)は境界条件で、v_jは境界上の単位法線ベクトルの方向余弦である。また、$(\overline{\ })$は既知量を示す。

3．有限要素法

a）速度の計算

自由表面の位置を解く前に、式(1)を解いて、次式により節点速度を求めなければならない。

$$\left\{\frac{1}{\Delta t}[C] + \theta[K]\right\}\{u\}_{t+\Delta t}$$

$$= \{F\} + \left[\frac{1}{\Delta t}[C] - (1-\theta)[K]\right]\{u\}_t \quad (8)$$

式(8)についての詳細は、参考文献 2)に述べられている。

b）自由表面の解析

流れの自由表面はその表面上にある粒子と共に時間変化する。密度関数Dは、式(8)により求まった速度によって移流するもので、次式を解くことにより求めることができる。

$$D_{,t} + u_i D_{,i} = 0 \quad (9)$$

$D_{,t}$及び$D_{,i}$はそれぞれ密度関数Dの時間と空間に関する導関数を示している。

ここで、式(9)の第２項が卓越する場合に有効なテイラー・ガラーキン法をＶＯＦ法に応用すると、次式のような有限要素式を得ることができる。

$$[K_D]\{\hat{D}_{,t}\} = \{F_D\} \quad (10)$$

ここで２次元問題について、任意の１要素について式(10)の$[K_D]$は次のように書き表すことができる。

$$[K_D(I,J)_e] = \int_{v_0} N_I N_J dv$$

$$+ \int_{v_0} \frac{\Delta t^2}{6}\left(u\frac{\partial N_I}{\partial x} + v\frac{\partial N_I}{\partial y}\right)\left(u\frac{\partial N_J}{\partial x} + v\frac{\partial N_J}{\partial y}\right)dv \quad (11)$$

ここでは９節点アイソパラメトリック要素を使用しており、Nは２次の近似関数である。

また、時刻$t+\Delta t$における節点のD値は次式により求めることができる。

$$D^{t+\Delta t} = D^t + \hat{D}_{,t}\cdot\Delta t \quad (12)$$

一般にDは０～１の間の値をとる。ここでは自由表

キーワード：有限要素法，クリープ流，自由表面

連絡先：〒259-1292 神奈川県平塚市北金目 1117 東海大学工学部　Tel 0463(58)1211　Fax 0463(50)2045

面として解析領域内のD＝０．５となる位置を結んだ面とする。

４．数値解析例

例題として、スランプ試験に相当する軸対称問題の自由表面を解析した。図１. は解析領域と使用した有限要素分割を示しており、１８９個の９節点アイソパラメトリック要素、８１７節点で構成されている。

この例題では代表流速を$U=\sqrt{2gL}$、代表長さをL、レイノルズ数を$R_e=\rho UL/\mu=1$として解析を行った。gは重力加速度である。

図２は得られた結果で、各時刻の自由表面の形状を示してある。ここで、t の単位は$[L/U]$である。

５．おわりに

密度関数の移流方程式そのものを精度良く解くために、テイラー・ガラーキン法による有限要素法により流動解析を行った。例題には参考文献 3)のものと同様のものを使用した。文献では、6 節点アイソパラメトリック要素を使用し、マーカー粒子法を用いた有限要素法により解析を行っているが、本研究で使用した９節点要素でも同様の結果を得ることができた。本来、土やコンクリートなどの構成式は非常に複雑である。ここでは実際の流体の構成式なども考慮した解析の可能性を示すことができた。

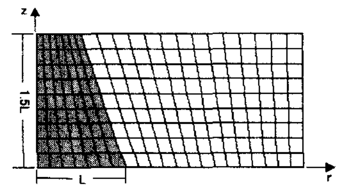

図１．解析領域　（ｔ＝0.0）

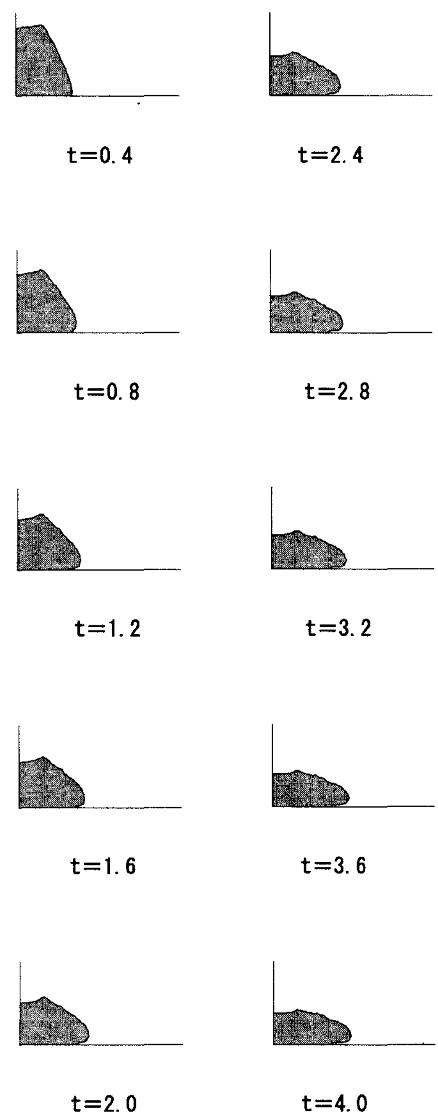

図２．解析結果

参考文献

1) 数値流体力学編集委員会 編：数値流体力学シリーズ 4 移動境界流れ解析，財団法人 東京大学出版会 1995 年.

2) ホワノタヤン・サクン，島﨑 洋治：クリープ流の非定常自由表面解析，東海大学紀要，Vol.37，No.2，1997，pp.117－122.

3) 戸田 哲哉，島﨑 洋治：ベクトルの外積によるマーカー粒子ＦＥＭ，東海大学紀要，Vol.39，No.1，1999，pp.147－152.