

宇都宮大学 学生員 大植 健 宇都宮大学 正会員 斉木 功
宇都宮大学 正会員 中島 章典 東北大学 正会員 寺田 賢二郎

1. はじめに

複合材料の物性評価のため、注目を集めている平均化手法として均質化法という理論がある。均質化法は非均質材料の平均物性を、その材料の微視構造の変形による影響を考慮して求めるマルチスケール解析の一つである。この微視構造のモデル化において巨視構造が連続体であれば、微視構造も連続体としてモデル化されることが一般的である。しかし、土やセル構造体^{1),2)}のような非均質材料において、微視構造は連続体としてより土は個別要素などの離散モデルや、セル構造体は骨組構造としてモデル化の方が合理的であると考えられる。

そこで本研究では、巨視的には連続体であるが、その微視構造が骨組構造によってモデル化される問題を設定し、その定式化を行うことを目的としている。

2. 解析方法

図-1に示すように、大きさ εY のユニットセルによって周期的に埋め尽くされた領域 Ω^ε を解析対象とし、平面ひずみの線形問題として定式化を行う。ただし、 ε は解析対象の大きさに比べて非常に小さい ($\varepsilon \ll 1$) とし、したがってユニットセルの大きさも解析対象に比べて非常に小さい。ここで、微小なユニットセル内での尺度として、微視スケール変数

$$y_i = x_i / \varepsilon \quad (1)$$

を導入する。これに対し、解析領域全体の尺度である、 x_i を巨視スケールと呼ぶこととする。ここで、一般的な釣合式の弱形式は以下の式で表される。

$$\int_{\Omega^\varepsilon} E_{ijkl}^\varepsilon \frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial x_l} \frac{\partial v_i^\varepsilon}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\partial\Omega^\varepsilon} t_i v_i^\varepsilon dS + \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon v_i^\varepsilon d\Omega \quad (2)$$

ここに、 E_{ijkl} は構成テンソルであり、 u_k^ε は変位、 v_i^ε は仮想変位である。 t_i は表面力、 f_i^ε は物体力であり、上付きの ε はユニットセルの大きさの影響を表す。

上の式に漸近展開法³⁾を用いて均質化法の定式化を進めていく。変位 u_k^ε を微視構造のスケール ε に関して漸近展開し、2変数表示すると以下ようになる。

$$u_k^\varepsilon(x) = u_k^0(x) + \varepsilon u_k^1(x, y) + \varepsilon^2 u_k^2(x, y) + \cdots \quad (3)$$

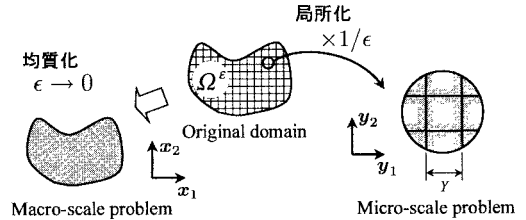


図-1 解析対象

この関係は、仮想変位 v_i^ε に対しても成り立ち、この漸近展開を行った変位を式 (2) に代入し、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限操作を行うために次に示す積分公式を用いる。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega^\varepsilon} \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \int_Y \psi dY d\Omega \quad (4)$$

以上のことから、微視スケールの釣合式 (微視的問題) として次式が得られる。

$$\int_Y E_{ijpq} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} dY = \int_Y E_{ijkl} \frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} dY \quad (5)$$

χ_p^{kl} は特性関数と呼ばれ、単位の巨視ひずみにに対する微視構造の変位を表し、上付きの kl は巨視ひずみの方向を表す。ここに、右辺は形式的に分布外力と同じ形で示されているが、この場合は外力ではなく単位の巨視ひずみに起因する内力であるので今後、巨視内力と呼ぶことにする。また、巨視スケールの釣合式 (巨視的問題) は次式のように得られる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} E_{ijkl}^H \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} d\Omega \\ = \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \int_Y f_i dY v_i^0 d\Omega + \int_{\partial\Omega} t_i v_i^0 dS \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、 E^H は均質化材料定数であり、次式で定義される。

$$E_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left\{ E_{ijkl} - E_{ijpq} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \right\} dY \quad (7)$$

ここで、微視問題における変位場に Bernoulli-Euler 梁の変位場を導入する。梁部材の部材軸に沿う y_1 軸とそれに直交する y_2 軸を局所座標系とすると変位場は以下ようになる。

$$\bar{u}_1(y_1, y_2) \simeq \bar{u}_a(y_1) + y_2 \bar{\theta}_a(y_1) \quad (8)$$

$$\bar{u}_2(y_1, y_2) \simeq \bar{w}_a(y_1) \quad (9)$$

変数についているオーバーラインは、それが局所系に属することを表し、下付きの a は梁の中立軸の変位であることを

Key Words: 均質化法, セル構造体, 骨組構造, マルチスケール解析

〒321-8585 宇都宮市陽東 7-1-2 宇都宮大学工学部建設学科 Tel.028-689-6208 Fax.028-689-6230

意味する。 $\bar{u}_a(y_1)$ を部材軸方向の変位、 $\bar{w}_a(y_1)$ を部材軸直角方向の変位、 $\bar{\theta}_a(y_1)$ を回転としている。式 (5) の微視的問題の特性関数 χ と仮想変位 v についてこの関係を用いると、微視構造を骨組構造としたものと等価な式が得られる。つまり、特性関数のひずみ成分について言えば以下のような関係が成り立つ。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\chi}_1^{k\ell}(y_1, y_2)}{\partial y_1} &= \frac{d\bar{u}_a^{k\ell}(y_1)}{dy_1} + y_2 \frac{d\bar{\theta}_a^{k\ell}(y_1)}{dy_1} \\ \frac{\partial \bar{\chi}_1^{k\ell}(y_1, y_2)}{\partial y_2} &= \bar{\theta}_a^{k\ell}(y_1) \\ \frac{\partial \bar{\chi}_2^{k\ell}(y_1, y_2)}{\partial y_1} &= \frac{d\bar{w}_a^{k\ell}(y_1)}{dy_1} \\ \frac{\partial \bar{\chi}_2^{k\ell}(y_1, y_2)}{\partial y_2} &= 0\end{aligned}\quad (10)$$

ここに、 $\bar{u}_a^{k\ell}(y_1)$ 、 $\bar{w}_a^{k\ell}(y_1)$ 、 $\bar{\theta}_a^{k\ell}(y_1)$ の上付きの $k\ell$ は特性関数と同様、巨視ひずみの方向を表す。

また、均質化材料定数は式 (7) に特性関数として先に説明した梁の変位場を導入すれば、次式のように得られる。

$$E_{ijk\ell}^H = \frac{h_e}{|Y|} \int \left\{ \bar{E}_{ijk\ell} - \bar{E}_{ij11} \frac{d\bar{u}_a^{k\ell}(y_1)}{dy_1} \right\} dy_1 \quad (11)$$

上式の積分はユニットセル内の全部材に関する部材軸に沿った積分であり、 h_e はユニットセルを構成する骨組部材の高さである。

3. 解析例および考察

上で示した解析手法に対してユニットセルの一辺の長さ L と骨組部材の高さ h_e の比を $h_e/L = 1/32$ とし、正方形セルを例として以下に解析例を示す。ユニットセルを構成している材料は、等方性弾性体の平面ひずみ問題として考え、Young 率 E を 1.0(GPa)、Poisson 比を 0.3 とした。

(1) 特性関数

特性関数を求めるために正方形ユニットセルに対して有限要素法を用いる。その際、各要素ごとの剛性マトリクスと巨視内力は、式 (5) の微視的問題より導くことになる。実際に計算を行うと、骨組構造の正方形ユニットセルでは任意の位置で特性関数は 0 となる。

(2) 均質化材料定数

均質化材料定数は式 (11) より次のように得られる。

$$\begin{aligned}\frac{E_{1111}^H}{E} &= \frac{E_{2222}^H}{E} = 3.37 \times 10^{-1} \\ \frac{E_{1122}^H}{E} &= \frac{E_{2211}^H}{E} = 1.44 \times 10^{-1} \\ \frac{E_{1212}^H}{E} &= 9.62 \times 10^{-2} \\ \frac{E_{1112}^H}{E} &= \frac{E_{2212}^H}{E} = \frac{E_{1211}^H}{E} = \frac{E_{1222}^H}{E} = 0\end{aligned}$$

上に示したように正方形ユニットセルにおいて特性関数はすべての位置で 0 となり、式 (11) より体積平均と同じである。また、下に示したユニットセルを連続体として求めた均質化材料定数と比べてみても明らかに異なる値を示す。

$$\frac{E_{1111}^H}{E} = \frac{E_{2222}^H}{E} = 1.41 \times 10^{-1}$$

$$\frac{E_{1122}^H}{E} = \frac{E_{2211}^H}{E} = 9.36 \times 10^{-3}$$

$$\frac{E_{1212}^H}{E} = 4.52 \times 10^{-2}$$

$$\frac{E_{1112}^H}{E} = \frac{E_{2212}^H}{E} = \frac{E_{1211}^H}{E} = \frac{E_{1222}^H}{E} = 0$$

図-2、図-3 は骨組モデルと連続体モデルとで構成されたユニットセルの巨視ひずみ $\frac{\partial u_0}{\partial x_1} = -1$ の時に対する特性関数である。これらの図より、骨組モデルでは先に説明したように任意の位置で特性関数は 0 となるが、連続体モデルでは図から明らかのように、梁が軸直角方向に変形している。

つまり、今回のような正方形ユニットセル場合、巨視ひずみの方向に直交するような部材(曲げを受ける部材)は剛性としての役割はほとんどなく、軸方向に圧縮(引張)を受けるような部材がその剛性としての役割を持つ。連続体モデルはその直交している部材に関して図のようにその部材の剛性を差し引くように変形が生じるが、骨組モデルでは、変位場の拘束により変形がなく全ての部材が剛性を受け持ちその結果、今回のように約 2 倍、骨組モデルの方が剛性が高くなっている。また、解析手法の中でも示したように連続体モデルでの均質化材料定数は式 (7) より、部材軸方向と部材軸直角方向、両方の変形を考慮しているのに対し、骨組構造でモデル化した場合、式 (11) から均質化材料定数は部材軸方向の変形のみを考慮するようになっている。

したがって、骨組構造においても連続体モデルのような部材軸直角方向の変形も考慮しなければならない、その対策が必要とされる。

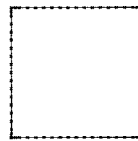


図-2 特性関数 (骨組)

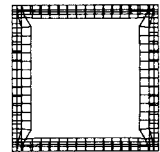


図-3 特性関数 (連続体)

参考文献

- 1) L. J. Gibson and M. F. Ashby: *Cellular solids*, CAMBRIDGE, 1997.
- 2) 斉木功, 寺田賢二郎, 池田清宏: セル構造体のマルチスケール解析のための座屈を考慮した微視スケール問題に関する一考察, 応用力学論文集, Vol.2, pp.287-294, 1999.
- 3) E. Sanchez-Palencia: *Non-homogeneous Media and Vibration Theory*, Springer-Verlag, pp.45-84, 1980.