(III－120)　　有限要素法を用いた引っ張りに抵抗しない材料の非線形弾性解析

中央大学　学生員　宮口 有吾
中央大学　正会員　川原 睦人

1. はじめに

現在日本には多くの構造物が建ち並び、地下にもトンネルや地下鉄、各種ライフラインが存在している。地盤の変形によるそれらへの影響は無視できない。よってこの影響を事前に予測する必要がある。しかし地盤の挙動を解析することは、その複雑性からとても困難である。例えば岩盤には、無数のクラックがあちこちに存在している。それ故、一般に引っ張り方向の応力を支えることができない。その一方で、圧縮方向の応力には、ある範囲では線形に近似出来るような挙動を示す。このような種類の挙動にあったモデルを考えると、岩盤を、圧縮方向の応力には線形に振舞い、引っ張り方向の応力にはほとんど抵抗せずに回りの要素に遷移させるようなモデルに過程することが考えられる。本研究では、このような無引張材料の解析を応力遷移法を用いて行ない、幾つかの代表的な問題を解く。また、解析手法は有限要素法を使っている。

2. 基礎方程式

● 変位ー歪み方程式（運動学的方程式）

微小変形を仮定すると、歪みテンソル ε_{ij} は、次のように書ける。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad (1)$$

ここで、 u_i は変位, ε_{ij}は圧縮方向を正とした歪みテンソル。

● 応力の釣合方程式（運動量保存の法則）

応力の釣合方程式は次のように書ける。

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i - \rho \ddot{u}_i = 0 \qquad (2)$$

ここで σ_{ij} は全応力、 b_i は物体力である。

● 応力-ひずみ方程式（構成方程式）

上式において σ_{ij} は土を弾性体と仮定した場合に次のように表せる。

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl} \qquad (3)$$

また、ここで D_{ijkl} は剛性マトリックスで以下に示す式で定義される;

$$D_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \qquad (4)$$

さらにλ, μ はそれぞれ次のようになる。

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \qquad (5)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (6)$$

ここで E はヤング率、 ν はポアソン比である。

3. 境界条件

前述の全体の釣合の方程式に対する境界条件として S_U, S_T とし、また、これらの境界条件は以下の条件を満足するものとする。

$$S_U \cup S_T = S \qquad (7)$$

$$S_U \cap S_T = \phi \qquad (8)$$

$$U_i = \hat{U}_i \qquad on \qquad S_U \qquad (9)$$

$$T_i = \sigma_{ij}n_j = \hat{T}_i \qquad on \qquad S_T \qquad (10)$$

ここで$\hat{}$は既知の値, n_jは境界の単位法線ベクトル成分である。

4. 空間方向の離散化

基礎方程式を三角形一次要素、ガレルキン法を用いて空間方向に離散化することにより以下の有限要素方程式を得ることができる。

$$M_{\alpha\beta}\delta_{ik}\ddot{U}_{\beta k} + K_{\alpha i\beta k}U_{\beta k} = \hat{\Gamma}_{\alpha i} \qquad (11)$$

減衰の影響を考慮した場合、式(11)は次のようになる。

$$M_{\alpha\beta}\delta_{ik}\ddot{U}_{\beta k} + C_{\alpha i\beta k}\dot{U}_{\beta k} + K_{\alpha i\beta k}U_{\beta k} = \hat{\Gamma}_{\alpha i} \qquad (12)$$

Key Words: 応力遷移法、弾性体モデル、有限要素法
〒112 東京都文京区春日 1-13-27

減衰項は以下の式で示される。

$$C_{\alpha i\beta k} = \bar{\alpha} M_{\alpha\beta}\delta_{ik} + \bar{\beta} K_{\alpha i\beta k} \tag{13}$$

ここに、減衰定数 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$は地盤の減衰率、及び固有周期より決定されるものである。
各係数行列は次のように示される。

$$M_{\alpha\beta} = \int_V \rho\Phi_\alpha\Phi_\beta dV \tag{14}$$

$$K_{\alpha i\beta k} = \int_V \Phi_{\alpha,j} D_{ijkl} \Phi_{\beta,l} dV \tag{15}$$

$$\hat{\Gamma}_{\alpha i} = \int_{S_T} \hat{T}_i \Phi_\alpha dS + \int_V \rho\Phi_\alpha b_i dV \tag{16}$$

ここに、Φ は形状関数である。

5. 時間方向の離散化

(1) 増分形

本解析では、非線形問題を扱うため、次のような増分形式を使う必要がある。

$$\{\ddot{u}^{(n+1)}\} = \{\ddot{u}^{(n)}\} + \{\Delta\ddot{u}^{(n)}\} \tag{17}$$

$$\{\dot{u}^{(n+1)}\} = \{\dot{u}^{(n)}\} + \{\Delta\dot{u}^{(n)}\} \tag{18}$$

$$\{u^{(n+1)}\} = \{u^{(n)}\} + \{\Delta u^{(n)}\} \tag{19}$$

$$\{f^{(n+1)}\} = \{f^{(n)}\} + \{\Delta f^{(n)}\} \tag{20}$$

これらを式(12)に代入すると、次式を得る。

$$[M]\{\Delta\ddot{U}^{(n+1)}\} + [C]\{\Delta\dot{U}^{(n+1)}\} + [K]\{\Delta U^{(n+1)}\} = \{\Delta\hat{\Gamma}^{(n+1)}\} \tag{21}$$

(2) Newmark'β 法

本解析では、 Newmark'β 法を時間方向の離散化に適用した。増分形式では、(n+1) 回目の速度と変位はそれぞれ次のように与えられる。

$$\{\Delta U^{(n+1)}\} = \Delta t\{\dot{U}^{(n)}\} + \frac{\Delta t^2}{2}\{\ddot{U}^{(n)}\} + \beta\Delta t^2\{\Delta\ddot{U}^{(n+1)}\} \tag{22}$$

$$\{\Delta\dot{U}^{(n+1)}\} = \Delta t\{\ddot{U}^{(n)}\} + \gamma\Delta t\{\Delta\ddot{U}^{(n+1)}\} \tag{23}$$

ここで Δt は時間増分量, γ と β は数値解析パラメータである。式 (22), (23) を、式 (21) に代入することにより、全体の釣合方程式に対する時間方向に離散化した有限要素方程式として次式を得る。

$$([M] + \gamma[C] + \beta\Delta t^2[K])\{\Delta\ddot{U}^{(n+1)}\} = \{\Delta\Gamma^{(n+1)}\} - [C]\Delta\{\ddot{U}^{(n)}\} + [K](\Delta t\{\dot{U}^{(n)}\} + \frac{\Delta t^2}{2}\{\ddot{U}^{(n)}\}) \tag{24}$$

6. 数値解析例

本研究では、線形弾性解析と、応力遷移法による無引張解析をそれぞれ比較する。まず図1のメッシュを用い、各物性値を表1に示す。また、数値解析パラメーターとして$\bar{\alpha} = 0.01$, $\bar{\beta}$=0.1, $\beta = 0.5$ を用いる。入力波として、規則的な sin 波と、不規則な振動(阪神大震災のもの)を横向きに与える。解析結果として、図3と図4にそれぞれの全応力の時刻歴を示す。

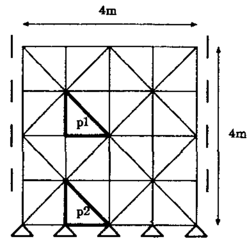


図1：有限要素分割図

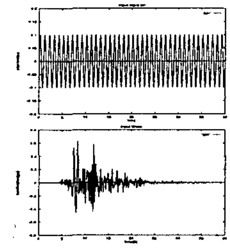
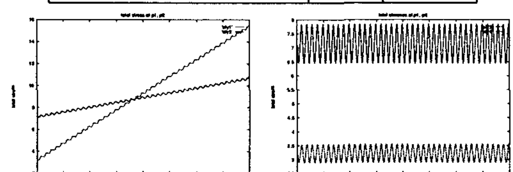


図2：入力波

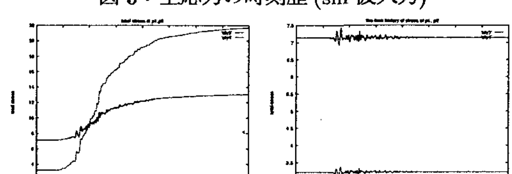
表1：材料の物性値

Young's Modulus : E	2000	tf/m^2
Poisson's Ratio : ν	0.20	−
Density of Soil : ρ_s	2.0	t/m^3



非線形(無引張)解析　　線形弾性解析

図3：全応力の時刻歴 (sin 波入力)



非線形(無引張)解析　　線形弾性解析

図4：全応力の時刻歴 (阪神の加速度入力)

7. 考察および今後の課題

弾性体モデルによる動的解析を行なった。また、応力遷移法を動的問題に適用した解析を行なった。これにより、弾性体モデルでも無引張り材料を考えることで非線形性を考慮することができることが示せた。

今後の課題としては、応力遷移法の弾塑性体モデルへの適用、それに伴う降伏条件の考慮。そして、広い領域の解析を行なうための境界条件などが挙げられる。

参考文献

1) Zienkiewicz O.C. ,Valliappan, S. and King, I.P. : 'Stress analysis of rock as a 'no-tention' material', Geotechnique, 18, pp55-66(1968)