(II－79)　風上差分法による分散係数の推定に関する考察

早稲田大学理工学部　学生会員　三戸　孝延
早稲田大学大学院理工学研究科　学生会員　朝倉　良介
早稲田大学理工学部　フェロー　鮏川　登

1. はじめに

河川の流れの分散係数を推定する方法として、河川に物質を投入し、投入地点より下流の2断面において物質濃度を測定し、上流側断面の測定値を境界条件とし、分散係数を仮定して移流分散方程式の数値解を求め、下流側断面の濃度を計算し、測定値と一致するように分散係数の値を推定する方法（濃度追跡法）がある。本研究では、参考文献1)に記載されているニュージーランドのWaikato川における濃度の測定データに基づいて、移流拡散方程式を風上差分法で数値計算し、分散係数の値を推定した結果について述べる。

2. 濃度の測定データ

Waikato川の濃度の測定データは、染料の投入地点から3.7、6.0、8.4、10.9、17.6および22.8km下流のA、B、C、D、EおよびFの6地点で測定して得られたもので、図1に示すように与えられている。Waikato川の濃度測定時の流量は約150m^3/s、水面幅は50～140m、平均水深は2.4～3.4m、流速は約0.7m/sであった。

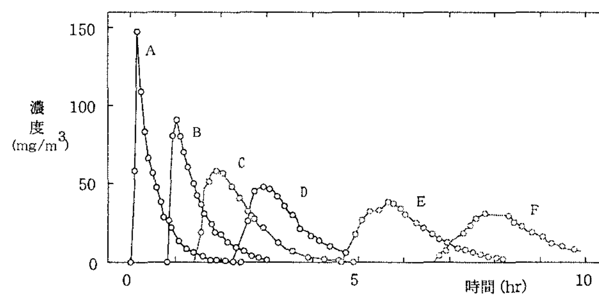

図1 Waikato川の濃度測定データ

3. 分散係数の推定法

移流分散方程式

$$\frac{\partial C}{\partial t}+u\frac{\partial C}{\partial x}=E\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \tag{1}$$

を風上差分法により差分化し、地点Aの濃度の測定値を境界条件とし、分散係数Eの値を仮定して、数値計算し、図２に示すように、地点Bの濃度の計算値と測定値が一致するように、AB間の分散係数の値を定める。なお、流速uは地点Bの測定値と計算値のピークの発生時刻が一致するように定める。同様にして、AB、BC、CD、DE、EF間の分散係数の値を推定する。

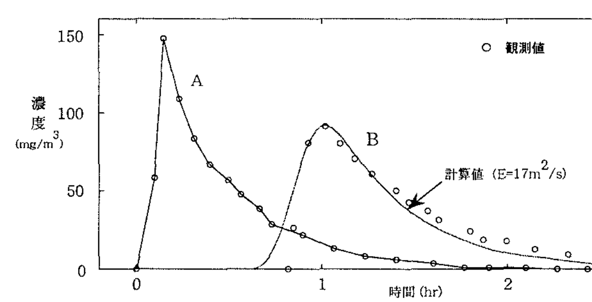

図2　分散係数の推定

移流分散方程式(1)の風上差分式としては次のような1次および３次の風上差分式を用いる。

1次風上差分法　$$C_i^{n+1}=(\alpha+d)C_{i-1}^n+(1-\alpha-2d)C_i^n+dC_{i+1}^n \tag{2}$$

3次風上差分法　$$C_i^{n+1}=-(\frac{\alpha}{3}+d)C_{i+1}^n+(1-\frac{\alpha}{2}-2d)C_i^n+(\alpha+d)C_{i-1}^n-\frac{\alpha}{6}c_{i-2}^n \tag{3}$$

ここで

$$\alpha=u\,\Delta x/\Delta t\text{ 、 }d=E\,\Delta t\big/(\Delta x)^2 \tag{4}$$

である。

4. 分散係数の推定結果および考察

計算断面間隔Δxを100mとし、計算時間間隔Δtを10secとして、式(2)および式(3)により数値計算し、Waikato川の各区間の分散係数の値を推定した結果を表1に示す。なお、表1には、参考文献1)に記載され

キーワード: 分散係数、風上差分法
連絡先:　169　東京都新宿区大久保3-4-1

ているFischerの方法[2]による分散係数の推定値も示した。表1によると、3次風上差分法による分散係数の推定値はFischerの方法による推定値とほぼ一致しているが、1次風上差分法による推定値はFischerの方法による推定値より小さくなっていることが認められる。これは1次風上差分法による数値計算では数値拡散が生じ、その分、分散係数の値が小さく推定されるためであると考えられる。

表1 分散係数の推定値(m^2/s)

	AB	BC	CD	DE	EF
1次風上差分法	——	48	50	10	30
3次風上差分法	17	62	70	38	67
Fischerの方法	15～18	52～62	70	34	67

そこで、数値拡散の状況を調べるために物質の移流だけを考える場合、すなわち、式(1)でE=0とする場合について数値計算を行った。その結果の1例を図3に示す。図3はBC間の計算例を示しているが、移流だけの場合は地点Bの濃度波形が変形せずに地点Cに伝播することになるが、図3によると、1次風上差分法による地点Cの計算濃度のピーク値は地点Bのピーク値より小さくなっている。これは1次風上差分法による数値計算では数値拡散を生じていることを示している。同様に他の河道区間における1次風上差分法による数値計算でも数値拡散が生じていることが示された。3次風上差分法による数値計算では、各河道区間とも数値拡散は殆ど認められなかった。なお、Fischerの方法は瞬間面源に対するTaylorの解析解を重ね合わせることによって濃度追跡を行うもので、数値拡散は生じない方法である。

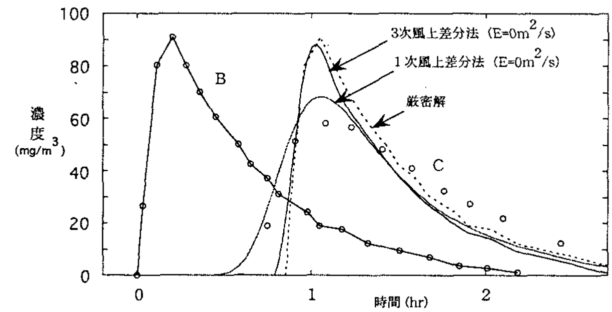

図3 移流による物質輸送の数値計算

Fischerの方法により定められた分散係数の値（表1参照、ただし、AB間は17㎡/s、BC間は57m^2/sとする）を用いて、地点Aにおける濃度の測定値を境界条件として、地点B～Fの濃度を$\Delta x=100m$、$\Delta t=10sec$として3次風上差分法により計算し、測定値と比較した結果を図4に示す。

図4には分散係数を0とした計算結果も示してあるが、数値拡散は小さいことが推定される。このように、数値拡散を生じないようにΔxおよびΔtを定めると、風上差分法によっても濃度変化を精度よく追跡できるものと思われる。

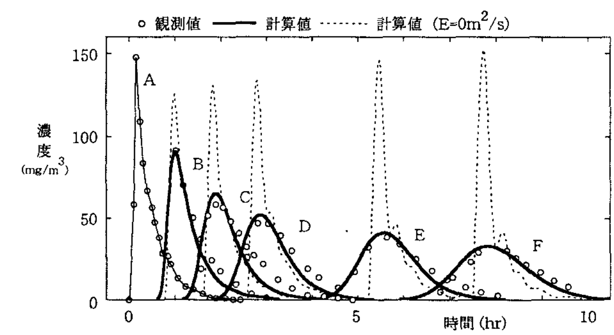

図4 濃度追跡の計算値と測定値の比較

5. まとめ

風上差分法による移流拡散方程式の数値計算では、数値拡散が生じてないことを確かめることが必要である。

参考文献

1) Rutherford,J.C.,Taylor,M.E.U. and Davies,J.D.: Waikato River Pollutant Flushing Rates, Journal of Environmental Engineering Division, ASCE, Vol.106, No.EE6, Dec.,1980, pp.1131～1150.

2) Fischer,H.B.: Dispersion predictions in natural streams, Journal of Sanitary Engineering Division, ASCE, Vol.94, No.SA5, 1968, pp.927～943.