

低レイノルズ数の急拡水路流れの 有限要素法解析

中央大学 学生員 ○木村 恵子
中央大学 学生員 丸岡 晃
中央大学 正会員 川原 睦人

1. はじめに

非圧縮性流体における急拡水路流れ問題は、レイノルズ数の変化に伴い、対称流れから非対称流れに変化する問題である。急拡水路では、細水路部からの流れが急拡部で逆圧力勾配の領域ができることにより、剥離し噴流となって急拡部の流体と激しく混合を行ないながら渦構造が変化し、太い水路の壁に付着したのち、やがて流れ方向に一樣な流れとなる。この流れは、あるレイノルズ数に達すると、流れ方向に対して対称であった渦構造が非対称となる現象が見られる。一般に、ある臨界レイノルズ数で流れ方向に対しての渦運動が非対称となることが、実験と数値解析により確認されている¹⁾²⁾。本研究の目的は、渦構造がどのあたりのレイノルズ数で非対称に遷移するかを検討することにある。本論文では、急拡水路流れにおいて、対称流れから非対称流れになる臨界レイノルズ数を検討するものである。ここで、数値解析手法としては運動方程式の離散化にBTD法を陰的に改良することによって安定性を高めた改良型BTD法³⁾を用い、連続式の取り扱いには分離型解法を用いた手法を適用した。この手法の特徴は、安定性に優れている点と、高速に計算することが可能な点である³⁾。また数値解析例は、2次元平面の急拡比1:2の急拡水路を用いた。その結果、レイノルズ数210~220付近で、流れ方向に対する渦構造が、対称な構造から非対称な構造に変化することが、数値計算から確認できたのでこれを報告する。

2. 基礎方程式

本研究で用いる基礎方程式は以下に示すような無次元化された2次元の非圧縮Navier-Stokes方程式を用いるものとする。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

Key Words: Sudden Expansion Flows, IBTD method, FEM

〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27

ここで、 Ω は、境界 Γ で囲まれた解析領域、 $\mathbf{u}, p$ は、流速、圧力、 $\mathbf{f}$ は、外力項、また $\nu = 1/Re$ であり、 Re はレイノルズ数である。

境界 Γ は Γ_1 と Γ_2 に分けられ、以下の境界条件が規定される。

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (3)$$

$$\{-p\mathbf{I} + \nu \nabla \mathbf{u}\} \cdot \mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}} \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{I}$ は、単位テンソル、 $\mathbf{n}$ は、境界 Γ の外向き法線ベクトルである。

3. 離散化手法

時間方向の離散化には、安定性に優れた時間増分を大きくとれる陰的解法を適用する。運動方程式(1)にCrank-Nicolson法を適用し、連続式(2)は完全陰的に表す。

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} + \nabla p^{n+1} - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (6)$$

ここで $\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}$ と $\mathbf{u}^*$ は以下のように書き表される。

$$\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n+1}), \quad \mathbf{u}^* = \frac{1}{2}(3\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1})$$

運動方程式の離散化には、文献³⁾による改良型BTD法を適用し、連続式の離散化には、分離型解法を用いた。

4. 数値解析例

本解析では、レイノルズ数200,210,220,230,240,250,260,270,280,290,300,400,500の2次元平面の急拡比1:2($H/D = 0.5$)の急拡水路流れを計算した。時間増分量は $\Delta t = 0.05$ とし、定常状態に達するまでの計算を行なった。図1に計算領域を示す。流下方向には流入断面 D に対して、 $63D$ の長さをとった。メッシュの総接点数、総要素数はそれぞれ14,875、29,120である。流入境界には、ポアズイユ流($U_{max} = 1$)を与え、初期条件として、上壁と下壁は $u, v = 0$ とし、右端は $P = 0$ とした。図2は急拡部の拡大

メッシュ図 ($x = -6.0 \sim 12.0$) を表している。 DX は流れの非対称性を把握するための分岐パラメータ ($DX = |x_2 - x_1|$) で、上壁と下壁の再付着点の差で定義されている。分岐パラメータが $DX = 0$ で流れは対称であり、 $DX \neq 0$ では非対称である。なお、再付着点の位置は、壁面から1層目の流速の正負により判定した。

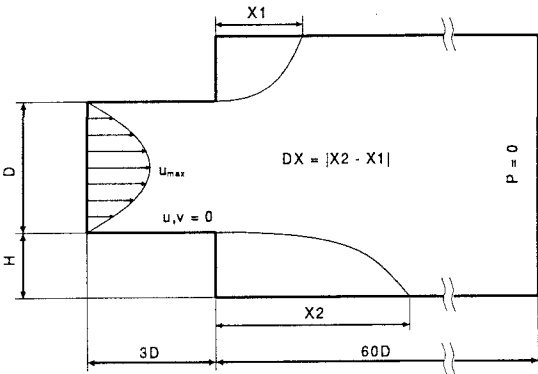


図1: 計算領域

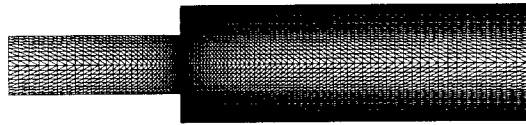


図2: 急拡大部におけるメッシュ拡大図

5. 解析結果

分岐パラメータのレイノルズ数ごとの変化を図3に示す。実線はDrikakisによる計算結果¹⁾を表し、点は本手法による計算結果を表す。 $Re = 210 \sim 220$ で $DX \neq 0$ となっているので、この付近で流れ方向に対して、非対称な渦構造となることがわかる。計算結果は、Drikakisによる計算結果と良好に一致した。 $Re = 200 \sim 300$ の計算では、安定な非対称状態に達したレイノルズ数の高い計算結果を初期条件としたものと対称状態のレイノルズ数の低い計算結果を初期条件としたものの2ケースの計算を行なった。対称状態の初期条件から非対称の解を得るためには、非対称状態の初期条件による計算と比べ約5倍の計算ステップを要した。図4は流線を表している。この図からも同様に $Re = 210 \sim 220$ で、非対称となっていることがわかる。

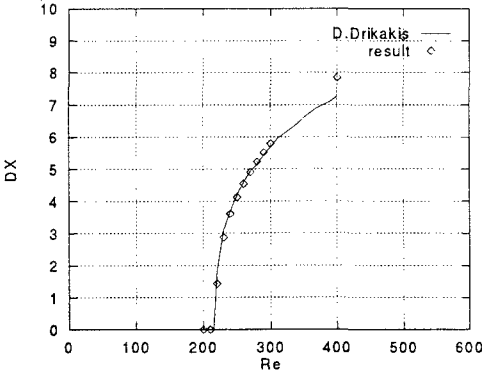


図3: 分岐パラメータのレイノルズ数変化

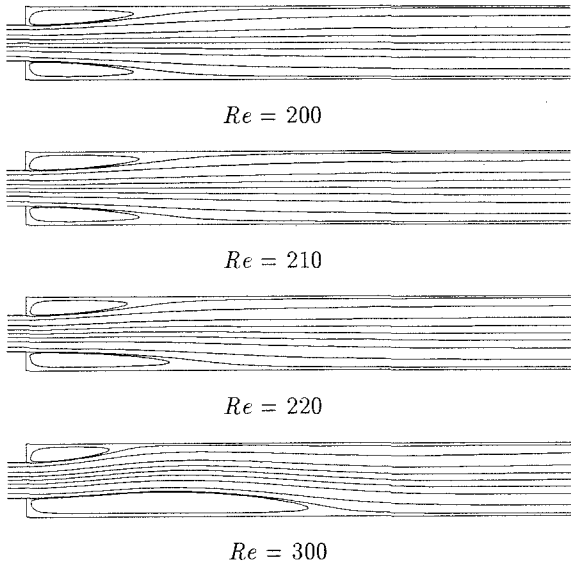


図4: 流線

6. おわりに

本論文では、低レイノルズ数における急拡大水路流れを有限要素法による解析手法により解析し、D.Drikakisの結果と比較を行なった。そして、本解析とD.Drikakisの結果と非常によく一致した。また、 $Re = 210 \sim 220$ で流れ方向に対しての渦構造が非対称になることがわかった。

参考文献

- 1) Drikakis, D., Bifurcation phenomena in incompressible sudden expansion flows, J. Phys. Fluids, Vol.9, pp.76-87, (1997)
- 2) E. O. Macagno, and T. K. Hung, Laminar eddies in a two dimensional conduit expansion, J. Fluid Mech. 28, 43 (1967)
- 3) 丸岡 晃, 太田 真二, 平野 廣和, 川原 睦人, 同次補間を用いた陰的有限要素法による非圧縮粘性流れの解析, 構造工学論文集, Vol.43A, pp.383-394, (1997).