(II－15)

カルマンフィルター・有限要素法による御宿海岸の潮汐流解析

中央大学　学生員　○川島　理
中央大学　正会員　　川原 睦人

1. はじめに

観測データを用いて物理現象をとらえる際、多少なりとも観測データにノイズを含んでしまいデータを充分生かしきれないことが多い。そこで、このノイズを含んだデータを有効利用するために、カルマンフィルターを用いる。本研究では、千葉県御宿海岸において、1997年7月11日から7月29日に観測を行ない、そのデータを用いてその時の御宿海岸の流況の推定を行なった。その際、観測地点以外の状態量は、有限要素法を組み込むことによって推定した。

2. 有限要素法

(1) 基礎方程式

基礎方程式として、以下の線形浅水長波方程式を用いる。

<運動方程式>

$$\dot{u}_i + g\eta_{,i} = 0 \tag{1}$$

<連続式>

$$\dot{\eta} + hu_{i,i} = 0 \tag{2}$$

ここに u_iは鉛直方向平均流速、gは重力加速度、ηは水位変動量、 h は水深を示す。

(2) 有限要素方程式

数値解析手法としては、三角形一次要素を用いた有限要素法を適用した。離散化された有限要素方程式は次式で表される。

$$M_{\alpha\beta}\dot{u}_{\beta i} + gH_{\alpha\beta i}\eta_\beta = 0 \tag{3}$$

$$M_{\alpha\beta}\dot{\eta_\beta} + hH_{\alpha\beta i}u_{\beta i} = 0 \tag{4}$$

ここに、質量行列 $M_{\alpha\beta}$ と係数行列は、一次の補間関数Φ_αを用いて以下のように表される。

$$M_{\alpha\beta} = \int_\Omega(\Phi_\alpha\Phi_\beta)d\Omega \ , \ H_{\alpha\beta i} = \int_\Omega(\Phi_\alpha\Phi_{\beta,i})d\Omega$$

また、時間方向の離散化は一段階陽的解法を用いた。

$$\bar{M}_{\alpha\beta}u_{\beta i}^{n+1} = \tilde{M}\alpha\beta u_{\beta i}^n - \Delta tgH_{\alpha\beta i}\eta_\beta^n \tag{5}$$

$$\bar{M}_{\alpha\beta}\eta_\beta^{n+1} = \tilde{M}_{\alpha\beta}\eta_\beta^n - \Delta thH_{\alpha\beta i}u_{\beta i}^n \tag{6}$$

ここで、$\tilde{M}\alpha\beta$は、以下のように表される。

$$\tilde{M}_{\alpha\beta} = e\bar{M}_{\alpha\beta} + (1-e)M_{\alpha\beta} \tag{7}$$

$\bar{M}_{\alpha\beta}$は、質量行列$M_{\alpha\beta}$の集中化、eはランピングパラメータであり計算の安定化のための人工粘性である。

3. カルマンフィルタ

(1) 基礎方程式

<状態方程式>

$$x_{k+1} = F_kx_k + G_kw_k \tag{8}$$

<観測方程式>

$$y_{k+1} = H_kx_k + v_k \tag{9}$$

ここに、x は状態ベクトル、Fは状態遷移行列、Gは駆動行列、Hは観測行列、yは観測ベクトル、wはシステム雑音、vは観測雑音である。ここでシステムノイズ、観測ノイズはホワイトノイズとする。

最適推定値$\hat{x}$は観測値 Y_kが与えられた時の条件付平均値である。

$$\hat{x_k} = E\{x_k|Y_k\} \tag{10}$$

この時共分散 Pは、式 (11) となる。

$$P_k = cov\{x_k|Y_k\} = E\{(x_k-\hat{x_k})(x_k-\hat{x_k})^T\} \tag{11}$$

推定値 x_k^*は観測値Y_{k-1}が与えられた時の条件付平均値である。

$$x_k^* = \{x_k|Y_{k-1}\} \tag{12}$$

又、この時の共分散Γは、式 (13) となる。

$$\Gamma = cov\{x_k|Y_{k-1}\} = E\{(x_k-x_k^*)(x_k-x_k^*)^T\} \tag{13}$$

(2) 定式化

Bayes の公式より

<最適推定値>

$$\hat{x}_k = x_k^* + P_kH_k^TR_k^{-1}(y_k - H_kx_k^*) \tag{14}$$

Key Words: *Kalman filter,FEM,Estimation,State value*
〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27

＜カルマンゲイン＞

$$K_k = \Gamma_k H_k^T (R_k + H_k \Gamma_k H_k^T)^{-1} \quad (15)$$

＜推定誤差分散＞

$$P_k = (I - K_k H_k)\Gamma_k (I - H_k^T K_k^T) + K_k R_k K_k^T \quad (16)$$

4. 数値解析例

千葉県の御宿海岸において 1997 年 7 月 11 日から 7 月 20 日に観測した水位変動量と流速をデータとして用いる。また、220 節点 376 要素に有限要素分割された海域について考える。なお、観測地点は以下に示す NO.1〜NO.5 である。

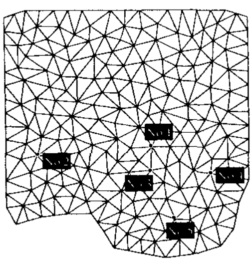


図 1 有限要素メッシュ

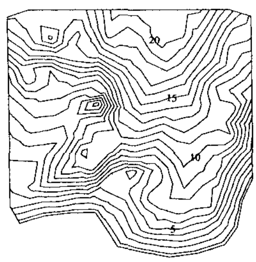


図 2 水深図

5. 解析結果

観測地点 NO.1〜NO.5 を用いて、推定された解析領域全体の残差流の結果を図 3 に示す。

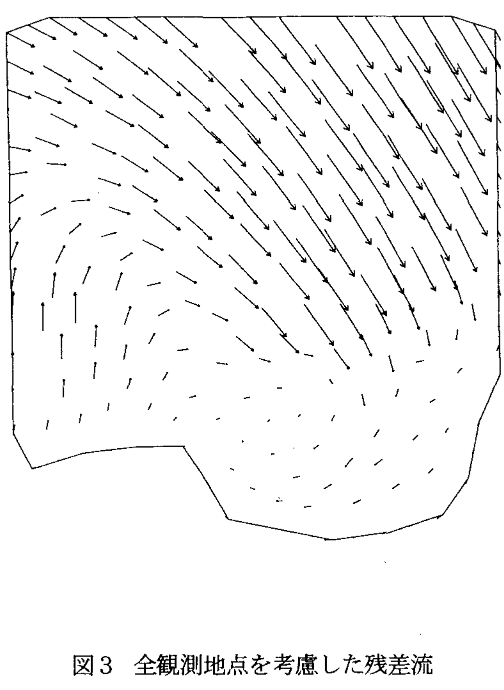
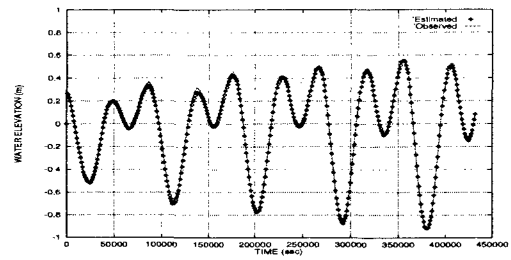


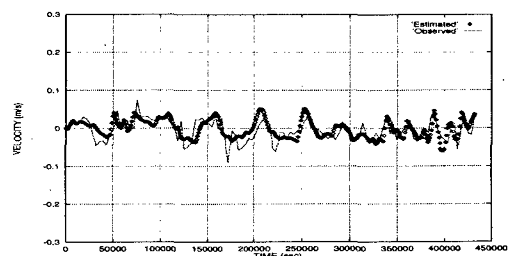
図 3 全観測地点を考慮した残差流

観測地点 NO.1〜NO.4 のデータを用いて NO.5 を推定したものと、観測地点 NO.5 のデータの比較を図 4 に示す。

水位変動量



U 方向の速度



V 方向の速度

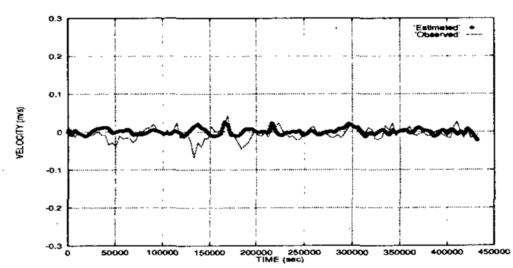


図 4 観測地点 NO.5 の推定

6. おわりに

今回の研究によって観測点以外の場所についても、本手法を用いて推定することができた。また、観測地点 NO.5 の推定結果と、観測値の比較も良い一致を示した。このことは、本手法の妥当性が一部示された。しかし、この手法は観測地点の場所に大きく依存するので、うまく観測地点をとらなくてはならない。

参考文献

1) 川原 睦人, 有限要素法流体解析, 日科技連, (1983).
2) 片山 徹, 応用カルマンフィルタ, 朝倉書店, (1983).