

(II-13) 安定化 Space-Time 有限要素法による移動境界を考慮した浅水長波流れ解析

中央大学大学院 学生員 ○菅野 諭
中央大学 正会員 榎山 和男

1. はじめに

津波や高潮などの数値計算を行う場合、水位の上昇に伴う水際線の移動を定量的にとらえる必要がある。これに対してこれまで幾つかの移動境界を取り扱う手法が提案されているが、それらの多くは、質量収支の保存が満たされていないという問題点が指摘されている。

そこで本研究では、これらの問題点を解決するために、時空間両方について有限要素近似を用いる手法である、移動境界問題に対して質量収支を厳密に扱うことができる Space-Time 有限要素法¹⁾を移動境界を考慮した浅水長波流れ解析に適用し、その有効性を検討するものである。なお安定化手法としては SUPG/PSPG 法²⁾⁵⁾を用いている。

2. 基礎方程式

基礎方程式として以下に示す非粘性を仮定した保存形の非線型、非定常の浅水長波方程式を用いる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = \mathbf{R} \quad \text{in } \Omega_t \quad (1)$$

ここに、 $\mathbf{U}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{A}_i$ は以下に示される。

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} H \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ Hu \\ Hv \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ gH \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ gH \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - u^2 & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ c^2 - v^2 & 0 & 2v \end{bmatrix}$$

ここに、 u, v はそれぞれ x_1, x_2 方向の流速成分、 ζ は水位上昇量、 c は波速、 H は全水深 ($= h + \zeta$)、 g は重力加速度、 h は初期水深を表す。

3. Space-Time 有限要素法

有限要素法における Space-Time 法は、時間方向の不連続量を考慮しつつ、空間と時間の双方に対して時間刻み領域 (Space-Time slab) 毎に独立に離散化を行い、各々の Space-Time slab について一つ前の Space-Time slab の情報をいわば初期条件として解き進んでいく手法である (図 1 参照)。このため時間刻み毎のメッシュ同士が幾何学的に連続である必要はない。この時間刻み領域は、鉛直時間境界 P_n と水平空間境界 Ω_n で囲まれており、そのため Space-Time 法では n 次元問題に対して、 $n+1$ 次元のメッシュが必要となるが、定式化そのものは時間方向を含めた単純な $n+1$ 次元への拡張ではない。また移動境界問題に適用す

る場合、Space-Time slab が長方形、三角柱等の形ではなくなるため、正規化された (ξ, θ) 座標系に変換する必要がある。

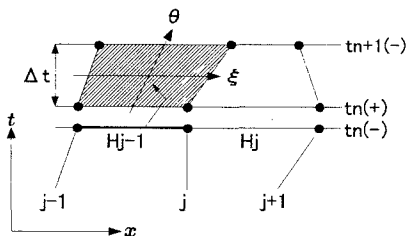


図-1 Space-Time mesh

4. 有限要素方程式

時空間の離散化に対し安定化 Space-Time 有限要素法を用いて基礎方程式の重み付き残差方程式を導くと次式のようなになる。また要素としては、空間方向に三角形 (時空間に三角柱) である要素を用い、時間、空間ともに 1 次の補関数を用いた。

$$\begin{aligned} & \int_{Q_n} \mathbf{U}^* \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} - \mathbf{R} \right) dQ \\ & + \int_{\Omega_n} (\mathbf{U}^*)_n^+ \cdot ((\mathbf{U})_n^+ - (\mathbf{U})_n^-) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{(n_{ei})_n} \int_{Q_n^e} \tau \mathbf{A}_k^T \left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial x_j} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} - \mathbf{R} \right) dQ \\ & + \sum_{e=1}^{(n_{ei})_n} \int_{Q_n^e} \delta \left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \right) dQ \\ & = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ここに e は要素を表している。また左辺第 1 項は通常の Galerkin 項、第 2 項は時刻 $t = t_n$ における解の不連続量を表した項である。第 3、第 4 項が安定化に寄与する項であり、第 3 項は SUPG 法による項、第 4 項 Shock Capturing 項と言い、流速、水位を同時補間するために生じる数値振動を抑える働きがある。ここで τ は上流化パラメーターであり次式を与える。また δ については、本報告では定数として取り扱っている。

$$\tau = \left[\left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2\|u\|}{h} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3)$$

ここで重み関数、近似関数は以下のような座標変換を行い正規化された式を用いる。

$$\mathbf{U}^{*h} = \sum_{j=1}^{nx} \Phi_j \left(\pi_n(\theta) \mathbf{U}^{*h}(\theta_{n+1}^-) + \tilde{\pi}_n(\theta) \mathbf{U}^{*h}(\theta_n^+) \right) \quad (4)$$

$$\mathbf{U}^h = \sum_{j=1}^{nx} \Phi_j \left(\pi_n(\theta) \mathbf{U}^h(\theta_{n+1}^-) + \tilde{\pi}_n(\theta) \mathbf{U}^h(\theta_n^+) \right) \quad (5)$$

Keywords: Space-Time FEM, 浅水長波流れ, 移動境界問題
〒112 東京都文京区春日 1-13-27
Tel:03-3817-1815, Fax:03-3817-1803

ここで Φ_j は座標変換された空間における形状関数、 π は同じく時間における形状関数で時間方向を一次で補間する場合は以下になる。

$$\pi_n(\theta) = (\theta + 1)/\Delta t \quad (6)$$

$$\bar{\pi}_n(\theta) = (-1 - \theta)/\Delta t \quad (7)$$

なお、時空間積分は、次のように表される。

$$\int_{Q_n} \dots dQ = \int_{I_n} \int_{\Omega} \dots d\Omega dt \quad (8)$$

ここに $I_n = (t_n, t_{n+1})$ である。また第2項における $(\dots)_n^+$, $(\dots)_n^-$ は、それぞれ境界における節点の上側値、下側値を表しており次式で定義される。

$$(U^h)_n^\pm = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U(t_n \pm \varepsilon) \quad (9)$$

また、水際線における流速を求める際の補正方法として実流速を次式と定義して最小二乗法より求める。

$$u = \frac{1}{H_e} \sum_a U_a N_a \quad \text{in } \Omega_e \quad (10)$$

ここで H^e は要素平均水深である。また節点の移動距離の決定にはこの補正された流速を用い、反復計算を用いて決定している。そのため基礎式を満足した精度の良い節点移動距離を決定することができる。

5. 数値解析例

本手法の有効性を検討するために、図-2に示す一様斜面上に孤立波が遡上する問題に対して、固定メッシュによる計算結果との比較計算を行った。なお初期条件等は図-2中に示している。

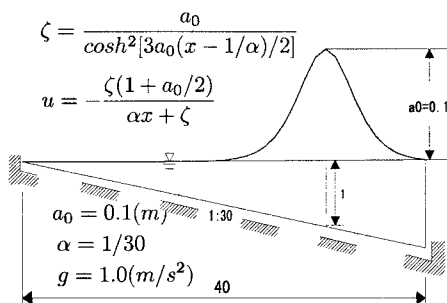


図-2 初期条件図

ここで $\Delta t = 0.250(s)$ としている。また解析には岸沖方向に40分割したメッシュを用いている。計算結果として図-3に100時間ステップ、25秒後までの計算結果を示す。図は水位の全体図を10ステップ毎にプロットしたものである。図-4には節点を移動した事による節点のx座標の時間変化を示したものである。図より有限要素メッシュを孤立波の進行とともに移動させ、波の頂点部分の有限要素分割間隔を狭くすることにより固定メッシュの場合の計算結果と比較して解の減衰が少なく浅水変形現象をよく表していることがわかる。

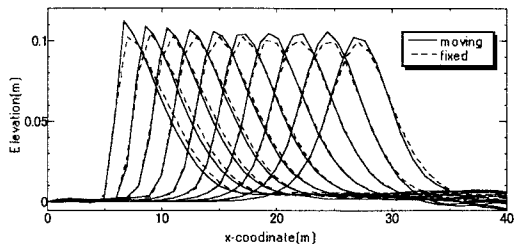


図-3 水位図

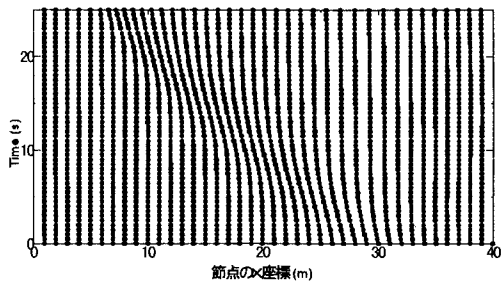


図-4 各時刻における節点のx座標

6. おわりに

本報告では、安定化 Space-Time 有限要素法を移動境界を考慮した浅水長波流れ解析に適用し、その有効性と問題点を検討した。その結果、孤立波遡上問題に対して、本手法により節点を適切に移動することにより固定メッシュを用いる場合と比較して浅水変形現象を良く表した精度の良い計算結果を得ることができた。

今後の課題として、水際線の移動問題に本手法を適用してその有効性と妥当性を検討していく所存である。

参考文献

- 1) Hughes, T.J.R. and Hulbert, G.M. "Space-Time finite element methods for elastodynamics: Formulations and error estimates", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engin.*, 66, pp339-363, 1988.
- 2) Behr, M. and Tezduyar, T. "Finite element solution strategies for large-scale flow simulation", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engin.*, 112, pp3-24, 1994.
- 3) Kawahara, M., and Kashiyma, K. "Selective lumping finite element method for the nearshore current", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol.4, pp.71-97, 1984.
- 4) T.E. Tezduyar, S. Mittal, S.E. Ray and R. Shih, "Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engin.*, 95, pp221-242, 1992.
- 5) S.W. Bova and G.F. Carey, "A symmetric formulation and SUPG scheme for the shallow-water equations", *Advances in Water Resources*, Vol.19, No.3, pp123-131, 1996.
- 6) 樫山和男, 菅野諭, Behr, M., Tezduyar, T. "安定化 Space-Time 有限要素法による浅水長波流れ解析", 土木学会第52回年次学術講演会, pp80-81, 1997.
- 7) Katapodes, N.D. "Two dimensional surges and shocks in open channels", *J. Hydraul. Engng*, 110, pp794-812, 1984.