

(I-19) アダプティブ space-time 有限要素法による移流拡散解析

中央大学 学生員 ○田村 隆志
中央大学 正会員 榎山 和男

1. はじめに

物質の移流拡散現象を正確に把握するためには、物質が広がりつつある界面での物理量を精度良く知る必要がある。このためには、界面近傍で細かな要素分割を行う必要がある。しかし、時間とともに移動する界面近傍の要素細分割を、人力で行うことは非常に困難である。また、解析領域全体を細かい有限要素で分割し計算するのは、計算機容量、計算時間を考慮すると効率的な手段とは言えない。

本報告は、移流拡散解析を高精度かつ安定に行うための、アダプティブ space-time 有限要素法を提案するものである。アダプティブ法には要素の再分割の仕方に何通りかの方法があるが、本報告では誤差測定に応じて節点の座標を移動させる r アダプティブ法を用いる。r アダプティブ法を用いると、より良い有限要素分割になるように時々刻々と節点が移動する。このため、節点が移動しても空間及び時間方向に高精度な解析が可能な space-time 有限要素法を採用している。なお、安定化手法としては、GLS 法 (Galerkin Least-Squares method) を用いている。

2. 基礎方程式

移流拡散方程式は (1) 式のように表される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_i \phi_{,i} + \kappa \phi_{,ii} = 0 \quad (1)$$

ここで、 ϕ は未知関数、 $_{,i}$ は i 方向の偏微分、 u_i は i 方向の移流速度、 κ は拡散係数を表す。

3. アダプティブ法

本報告で用いる r アダプティブ法は、節点を移動させることにより、誤差測度の大きい要素は要素の大きさを小さくし、誤差測度の小さい要素は要素の大きさを大きくして、少ない節点数で効率の良い計算を行うものである。誤差測度は補間誤差から求め、それを指標にして有限要素の再分割を行っている。

補間誤差を簡便に求める場合の式として、要素内を 1 次補間するときには以下のような式を用いる。

$$E^e = \int_{I_n} \int_{\Omega_e} \phi_{,ii}^e d\Omega_e dt \quad (2)$$

ここで、 E^e は各要素の誤差測度、 I_n は細分化された時間区間、 Ω_e は要素の空間領域、 $\phi_{,ii}^e$ は各要素における ϕ の i 方向の 2 階微分値である。

keywords : 有限要素法, アダプティブ法
space-time 法, 移流拡散解析

〒112 東京都文京区春日 1-13-27

TEL 03-3817-1815, FAX 03-3817-1803

$\phi_{,ii}^e$ を求める過程の $\hat{\phi}_{,i}$ は、(3) 式のように最小二乗法 [1] により各要素における $\phi_{,i}^e$ を節点に分配して求める。

$$\text{Min} \sum_{e=1}^{N_e} \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} (\hat{\phi}_{,i} - \phi_{,i}^e)^2 d\Omega_e \quad (3)$$

N_e は要素総数、 $\hat{\phi}_{,i}$ は節点における解の勾配、 $\phi_{,i}^e$ は要素における解の勾配で有限要素解析により求めた各節点の ϕ から得られる。そして (3) 式より求めた $\hat{\phi}_{,i}$ から、要素における解の 2 階微分値 $\phi_{,ii}^e$ を求める。

r アダプティブ法では、各要素ごとに求まった誤差測定 E^e をもとに、節点の位置を移動することで有限要素を改善する。移動後の節点の位置は以下の (4) 式 [1] で得られる。

$$x_i^n = \frac{\sum_{e=1}^{M^n} (E^e / (A^e)^\alpha) x_i^e}{\sum_{e=1}^{M^n} (E^e / (A^e)^\alpha)} \quad (4)$$

x_i^n は節点 n の新しい座標位置、 M^n は節点 n に接続する要素の数、 E^e 、 x_i^e 、 A^e はそれぞれ節点 n に接続する要素の誤差測度、重心位置、面積である。節点の移動距離を調整するパラメーター α は 0.5 とした。

4. space-time slab の座標変換

アダプティブメッシュコントロールによって節点が移動するため、時空間にまたがる要素である space-time slab は任意の六面体になる。六面体の space-time slab で積分をするには、物理座標系 (x, y, t) を正規化した計算座標系 (ξ, η, θ) に変換する必要がある。

正規化された (ξ, η, θ) 座標系において、空間方向 1 次、時間方向 1 次で補間したときの重み関数 w は (5) 式のように書き表せる。

$$w(\xi, \eta, \theta) = \sum_j N_j(\xi, \eta) (\pi_n(\theta) w_{j;n+1} + \bar{\pi}_n(\theta) w_{j;n}) \quad (5)$$

N_j は空間方向の形状関数であり、 π_n 、 $\bar{\pi}_n$ は時間方向の形状関数である ((6)、(7) 式)。

$$\pi_n(\theta) = (\theta + 1) / \Delta t \quad (6)$$

$$\bar{\pi}_n(\theta) = (1 - \theta) / \Delta t \quad (7)$$

座標変換マトリクスは、重み関数 w を例にすると、六面体の場合には (8) 式のように表される。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial t}{\partial \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (8)$$

よって、(1) 式の左辺を座標変換すると (9) 式のようになる [2]。

$$\begin{aligned}\phi_{,t} + u_i \phi_{,i} + \kappa \phi_{,ii} &= \phi_{,\theta} \theta_{,t} + \phi_{,\xi} \xi_{,t} + u_i \phi_{,i} + \kappa \phi_{,ii} \\ &= \phi_{,\theta} \frac{2}{\Delta t} - \phi_{,\xi} v_i \xi_{,i} + u_i \phi_{,i} + \kappa \phi_{,ii} \\ &= \phi_{,\theta} \frac{2}{\Delta t} + (u_i - v_i) \phi_{,i} + \kappa \phi_{,ii} \quad (9)\end{aligned}$$

ここで v_i は要素の移動速度であり、各要素の移動速度 v_i^e は (10) 式のように求めた。

$$v_i^e = \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{\xi_i=0} \quad (10)$$

5. 重みつき残差方程式

space-time GLS 法による移流拡散方程式の重みつき残差方程式は以下になる。

$$\begin{aligned}& \int_{I_n} \int_{\Omega} (w \phi_{,t} + w u_i \phi_{,i} + w_i \kappa \phi_{,ii}) d\Omega dt \\ & + \int_{\Omega} w(t_n^+) (\phi(t_n^+) - \phi(t_n^-)) d\Omega \\ & + \sum_e \int_{I_n} \int_{\Omega} (w_{,t} + u_i w_{,i} - \kappa w_{,ii}) \tau (\phi_{,t} + u_i \phi_{,i} - \kappa \phi_{,ii}) d\Omega dt \\ & = 0 \quad (11)\end{aligned}$$

第1項目は Galerkin 法によるもので、第2項目は節点における時間方向の不連続量を表し jump condition 項と呼ばれる。第3項目は安定化を施す least-squares 項であり、その大きさを決める τ は (12) 式により定められる [3]。

$$\tau = \left(\left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2u}{h} \right)^2 + 9 \left(\frac{4\kappa}{h^2} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (12)$$

6. 数値解析例

数値解析例として、1次元移流拡散解析の計算結果をまとめた。解析領域は $x \in [0, 1]$ 、 $t > 0$ であり、初期条件は $\phi(x, 0) = 0$ 、境界条件は $\phi(0, t) = 1$ 、 $\phi(1, t) = 0$ である。 $t = 0$ の初期メッシュは、空間領域 $x \in [0, 1]$ を 10 等分割 ($\Delta x = 0.1$) したものをを用いた。解析条件は移流速度 $u = 50.0$ 、拡散係数 $\kappa = 1.0$ 、微小時間増分 $\Delta t = 0.05$ で $t = 1.00$ まで 20 ステップの計算をした。なお、アダプティブ法によるメッシュの再分割は、各時間ステップにつき 2 回行うことにした。

図1は固定メッシュで計算した Galerkin 法、図2,3はそれぞれアダプティブメッシュコントロールを行った Galerkin 法、GLS 法による計算結果である。それぞれ時間ステップが、1, 2, 3, 4, 5, 10, 20 のときの数値解をプロットしてある。固定メッシュの Galerkin 法では解に大きな数値振動が見られるが、メッシュコントロールを行うことにより図2のように計算が進むにつれて数値振動が収束していくことがわかる。今回取り上げた数値解析例は定常解をもつ例題であり、時間が経つにつれて図2のよう

に振動が徐々に収束した。さらに GLS 法を適用することで、大幅に数値振動が抑えられたことが図3よりわかる。

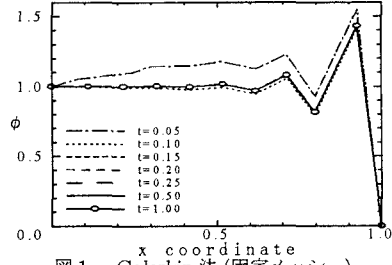


図1 Galerkin 法 (固定メッシュ)

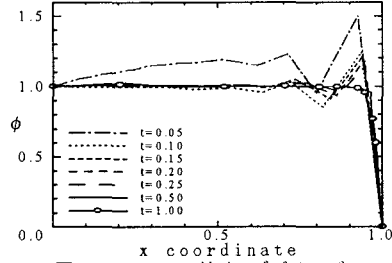


図2 Galerkin 法 (アダプティブメッシュ)

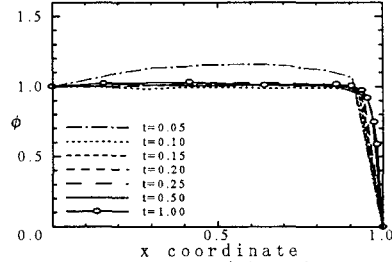


図3 GLS 法 (アダプティブメッシュ)

7. おわりに

本予稿では、space-time 有限要素法による 1 次元移流拡散解析の計算結果を比較し、計算手法の違いによる解の精度について考察した。

本報告で得られた結論は以下の 2 つの点である。

- 1) アダプティブメッシュコントロールを行うことにより移流の卓越による数値振動を減少させることができた。
- 2) GLS 法を適用することにより大幅に数値振動を抑制することができた。

今後は、多次元問題の解析を行う予定である。

参考文献

- [1] Kashiyma, K. and Kawahara, M., "Adaptive finite element method for linear water wave problems", Proc. JSCE, No. 387, pp. 115-124, 1987
- [2] M Behr, T. E. Tezduyar, "Finite element solution strategies for large-scale flow simulations", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 112, pp. 3-24, 1994
- [3] Farzin Shakib, Thomas J. R. Hughes, "A new finite element formulation for computational fluid dynamics 9. fourier analysis of space-time Galerkin / least-squares algorithms", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 87, pp. 35-58, 1991