

(I-14) 固体一流体連成モデルを用いた均質化法による粘弾性応力解析

中央大学大学院 学員 ○泉谷 隆志
中央大学大学院 学員 宇尾 朋之
中央大学 正員 樫山 和男

1. はじめに

内部構造の影響を考慮した複合材料の粘弾性挙動を評価する方法として、2つの方法が挙げられる。1つは、粘弾性挙動を表す古典的力学モデルを用いた際に得られる構成式に対して均質化法¹⁾を導入する方法²⁾。もう1つは、粘弾性体を固体と粘性の大きな流体の混合体と仮定した際に得られる構成式に対して均質化法を導入する方法である。^{3),4)}

本報告では、後者を用いた定式化を示すと共に、数値解析例として応力緩和解析を取り上げ、本手法の妥当性及び今後行う予定であるアスファルト混合物への適用の可能性について検討する。

2. 基礎方程式

固体と流体の混合体からなる粘弾性体の支配方程式及び材料構成式は(1),(2)式で示される。

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^e}{\partial x_i} + \rho^e \bar{b}_j = 0 \quad \text{in } \Omega^e \quad (1)$$

$$\sigma_{ij}^e(\mathbf{x}) = b_{ijkh}^e(\mathbf{x}) \varepsilon_{kh}(u^e) + c_{ijkh}^e(\mathbf{x}) \varepsilon_{kh} \left(\frac{\partial u^e}{\partial t} \right) \quad (2)$$

従って(1),(2)式から仮想仕事の原理式を導くことができる。

$$b(u^e, \omega^e) + c \left(\frac{\partial u^e}{\partial t}, \omega^e \right) = \int_{\Gamma_t} \bar{t} \omega^e d\Gamma + \int_{\Omega^e} \rho^e \bar{b} \omega^e dx \quad (3)$$

また $b_{ijkh}^e(\mathbf{x})$, $c_{ijkh}^e(\mathbf{x})$ は次式で示される係数マトリックスである。

$$b_{ijkh}^e(\mathbf{x}) = \begin{cases} E_{ijkh}(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega_s^e \\ \frac{1}{3} K^f \delta_{ij} \delta_{kh} & \text{in } \Omega_f^e \end{cases}$$

$$c_{ijkh}^e(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{in } \Omega_s^e \\ 2\mu^e \left(\delta_{ik} \delta_{jh} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kh} \right) & \text{in } \Omega_f^e \end{cases}$$

ここで、固体は線形弾性体、流体は圧縮性 Newton 流体を仮定する。また、流体は粘性の影響でゆっくりと流れるため、本報告ではレイノルズ数 <1 及びストークス条件を仮定する。なお K^f , E , μ^e はそれぞれ体積弾性係数、弾性係数、粘性係数である。

3. 均質化法の導入

均質化法は、2変数展開法を応用し、周期性を持つ微視構造で構成された材料(巨視構造)の平均物性を評価する手法である。巨視座標系 $\mathbf{x}$ と微視座標系 $\mathbf{y}$ との関係は、ス

ケール比 ϵ を用いると $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\epsilon$ として定義される。ここで、変位 $u^e(\mathbf{x})$ の漸近展開形は(4)式で表され、それを(3)式に代入し、漸近展開の1次の項まで考慮すれば、 ϵ のオーダーに関する方程式が得られる。なお u^0 は混合体の平均的な変位を表すものである。

$$u^e(\mathbf{x}) = u^0(\mathbf{x}, t) + \epsilon u^1(\mathbf{y}, t) + \epsilon^2 u^2(\mathbf{y}, t) + \dots \quad (4)$$

次に、ラプラス変換を適用し、微視的及び巨視的な変数の分離を行う。ラプラス空間上の微視構造方程式が唯一の解を持つと仮定すると、微視的変位は(5)式で表され、巨視的ひずみと線形弾性関係を保っていることが分かる。

$$\bar{u}_i^1(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \lambda) = -\bar{\Pi}_i^{kl}(\mathbf{y}; \lambda) \frac{\partial \bar{u}_k^0(\mathbf{x}; \lambda)}{\partial x_h} - \frac{1}{\lambda} \left(\bar{\Pi}_i^{kl}(\mathbf{y}, 0+) \frac{\partial u_k^0(\mathbf{x}, 0+)}{\partial x_h} \right) + \frac{1}{\lambda} c_i^l(\mathbf{x}) \quad (5)$$

ここで、 $\bar{\Pi}_i^{kl}(\mathbf{y}, t)$ は特性変位関数と呼ばれるもので、微視的な変位の乱れを表し、時間に対しては独立である。また、任意関数 $G(t)$ に対して(6)式が成り立つ。

$$\int_0^t B^T G(t) * B dx d(t) = \int_0^t B^T G(t-s) * B ds$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta t B^T G(n-k-1) B d(k+1) + \Delta t B^T G(n-k) B d(k)) \quad (6)$$

ここで、 $*$ はボルツマンの畳み込み積分記号である。

従って(5)式及びその逆ラプラス変換式を用いて分離された各方程式に逆ラプラス変換を適用すると、最終的に微視構造及び巨視構造の方程式は(7),(8)式として導くことができる。

(微視構造方程式)

$$\int_{\mathbf{y}} b_{ijlm}(\mathbf{y}) \frac{\partial \bar{\Pi}_i^{kh}(\mathbf{y}, t)}{\partial y_m} \frac{\partial \omega_j^1}{\partial y_j} dy$$

$$+ \int_{\mathbf{y}} c_{ijlm}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{\Pi}_i^{kh}(\mathbf{y}, t)}{\partial y_m} \right) \frac{\partial \omega_j^1}{\partial y_j} dy$$

$$= \delta(t) \left[\int_{\mathbf{y}} b_{ijkh}(\mathbf{y}) \frac{\partial \omega_i^1}{\partial y_j} dy - \int_{\mathbf{y}} (b_{ijlm}(\mathbf{y}) + c_{ijlm}(\mathbf{y})) \frac{\partial \bar{\Pi}_i^{kh}(\mathbf{y}, 0+)}{\partial y_m} \frac{\partial \omega_j^1}{\partial y_j} dy \right] \quad (7)$$

ここで、 $\delta(t)$ はデルタ関数である。

(巨視構造方程式)

$$\int_{\Omega} b_{ijkh}^H \frac{\partial u_k^0(\mathbf{x}, t)}{\partial x_h} \frac{\partial \omega_i^0}{\partial x_j} dx$$

$$- \int_{\Omega} g_{ijkh}^H(0+) \frac{\partial u_k^0(\mathbf{x}, 0+)}{\partial x_h} \frac{\partial \omega_i^0}{\partial x_j} dx$$

$$+ \int_{\Omega} c_{ijkh}^H \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_k^0(\mathbf{x}, t)}{\partial x_h} \right) \frac{\partial \omega_i^0}{\partial x_j} dx$$

KeyWords: Visco - Elasticity, Homogenization Method, Composite Material, FEM
〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27,
Tel : 03(3817)1815, Fax : 03(3817)1803

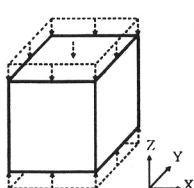
$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} g_{ijkh}^H(t) \frac{\partial u_k^0(x, 0+)}{\partial x_h} \frac{\partial \omega_i^0}{\partial x_j} dx \\
& - \int_{\Omega} g_{ijkh}^H(t) * \frac{\partial u_k^0(x, t)}{\partial x_h} \frac{\partial \omega_i^0}{\partial x_j} dx \\
& - \int_{\Omega} g_{ijkh}^H(t) * \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_k^0(x, t)}{\partial x_h} \right) \frac{\partial \omega_i^0}{\partial x_j} dx \\
& = \int_{\Gamma_t} \bar{t}_i \omega_i^0 d\Gamma + \int_{\Omega} \rho^H \bar{b}_i \omega_i^0 dx
\end{aligned} \quad (8)$$

さらに、均質化された応力は、微視的応力の体積平均として捉えると (9) 式で示すことができる。

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^H &= b_{ijkh}^H \frac{\partial u_k^0(x, t)}{\partial x_h} - g_{ijkh}^H(0+) \frac{\partial u_k^0(x, 0+)}{\partial x_h} \\
& - g_{ijkh}^H(t) * \frac{\partial u_k^0(x, t)}{\partial x_h} + c_{ijkh}^H \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_k^0(x, t)}{\partial x_h} \right) \\
& - g_{ijkh}^H(t) \frac{\partial u_k^0(x, 0+)}{\partial x_h} - g_{ijkh}^H(t) * \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_k^0(x, t)}{\partial x_h} \right) \quad (9)
\end{aligned}$$

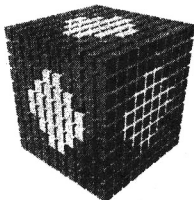
4. 数値解析例

数値解析例として、固体-流体の混合体からなる粘弾性体を想定し、両端の圧縮荷重（強制変位）による応力緩和解析を行う。なお、緩和時間は1秒間とする。また、巨視構造には節点数27、要素数8(図1)、微視構造には節点数1331、要素数1000、流体の体積比が47.2%(図2)の仮想モデルを用いている。また、表1に示す材料定数等は文献3),4)から選定し、時間積分に関しては完全陰解法によるものとして解析を行った。



(1mm × 1mm × 1mm)

図1 巨視構造



(1mm × 1mm × 1mm)

図2 微視構造

表1 材料定数

	$E(\text{GPa})$	ν	$K(\text{GPa})$	$\mu(\text{GPas})$
solid	30	0.3	—	—
fluid	—	—	1.5	1.5

5. 数値解析結果

巨視構造における *Mises* 応力の時間履歴を図3に示す。時間の経過と共に応力緩和が進行し、一定の応力値に近づいていくのが分かる。次に、微視構造における0.1, 1.0秒後の固体、流体に生ずる応力分布図を図4, 5に示す。図から、流体に比べ固体に大きな圧縮応力が生じていることが分かる。また、流体の応力は巨視構造と同様に時間の経過と共に緩和が見られ、固体が応力を受け持つ様子が捉えられている。また、固体部分においては応力値にばらつきが見られ、中央断面付近で局所的な応力集中が確認された。

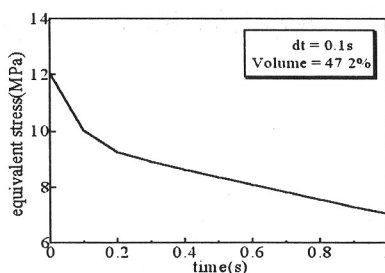


図3 巨視構造の *Mises* 応力の時間履歴

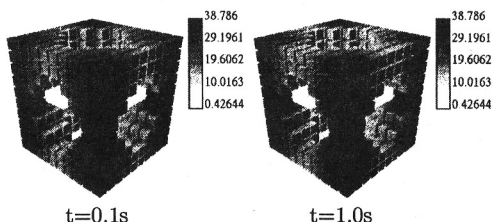


図4 固体の応力分布図

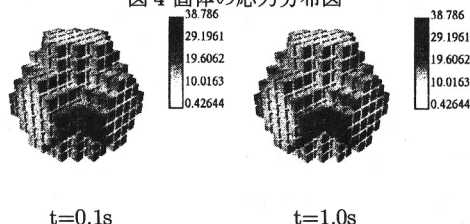


図5 流体の応力分布図

6. おわりに

本報告では、固体-流体（粘性の大きい）の混合体とみなした粘弾性体に対して、均質化理論を適用し、内部構造の影響を考慮した粘弾性挙動の定式化手法を示した。また、本手法の妥当性を検討するために応力緩和解析を行い、以下の結論を得た。

- 1) 巨視構造において、内部構造の影響を考慮した粘弾性挙動を捉えることができた。
- 2) 微視構造において、流体の応力は時間の経過と共に緩和が見られ、固体は応力を受け持つ様子が捉えられた。
- 3) 微視構造に仮想モデルを用いた解析では、粘弾性体の定性的な挙動を良く捉えており、実際のアスファルト混合物への適用も可能であると考えられる。

参考文献

- 1) José Miranda Guedes and Noboru Kikuchi : Pre-processing and Postprocessing for Materials Based on the Homogenization Method with Adaptive Finite Element Methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 83, pp.143-198, 1990.
- 2) 宇尾朋之, 櫻山和男 : 均質化法によるアスファルト混合物の粘弾性解析, 計算工学講演会論文集, pp.1111-1114, 1997.
- 3) Kenjiro Terada : Global-Local Modeling for Composites by the Homogenization Method, doctoral dissertation, 1996.
- 4) 寺田賢二郎, 伊東孝, 菊池昇 : 均質化法によって導かれる粘弾性体の構成則と数値解析, 計算工学講演会論文集, pp.1119-1122, 1997.