Lagrange の多項式を用いたエレメントフリー法の構築

群馬高専　学生会員　今井拓治
群馬高専　学生会員　高橋信繁
群馬高専　正 会 員　末武義崇

１．研究目的

構造解析における代表的な数値解法として、これまで有限要素法や差分法が広く用いられてきた。近年、これらの手法に代わる新しい数値解析手法として、エレメントフリー法と呼ばれる手法が注目されている。有限要素法では要素分割が必須であり、解析対象とする構造物が複雑になるほど、要素分割も煩雑になる。一方、差分法の場合、要素分割の作業を省くことはできるものの、各節点間の数値解を評価し得ないという問題点がある。こうした従来の数値解法の、問題点を解決し得るのが、エレメントフリー法の大きな特徴である。これまで種々のエレメントフリー法が考案されており、Belytschko ら [1]が考案した、移動最小二乗法に基づく Element Free Galerkin Method (EFGM)が最も著名であるが、ここではより簡明なエレメントフリー法の構築を目的とし、Lagrange の多項式を用いた離散化について検討する。具体例として、梁の曲げ解析や、薄板の曲げ解析に対する Lagrange の多項式を用いたエレメントフリー法の定式化について述べる。

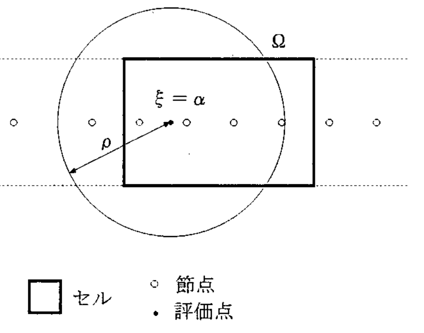
２．Lagrange の多項式を用いた離散化

１）１変数関数の場合

図１に示すような評価点 $\xi=\alpha$ を中心とする半径 ρ のサポート領域 Ω を考える（図１）。評価点近傍の関数 $\omega(\xi)$ を Ω 内部の N+1 個の節点値 ω_j (j=0~N)を用いて、次式のような Lagrange の多項式で表すことにする。

$$\omega(\xi)=\sum_{j=0}^{N}\omega_j\varphi_j(\xi) \qquad (1)$$

ここに、$\varphi_j(\xi)$ は Lagrange 基底であり、次式で定義される。



$$\varphi_i(\xi)=\prod_{m=0}^{N}X_{m,i}(\xi) \quad ; \quad X_{m,i}(\xi)=\begin{cases}1 & (m=i)\\ \dfrac{\xi-\xi_m}{\xi_i-\xi_m} & (m\neq i)\end{cases} \qquad (2)$$

図１．評価点近傍の構造（１次元）

Lagrange の多項式（１）を用いれば、評価点 $\xi=\alpha$ における関数値および微分値を、サポート領域内の節点値で表現することができ、その関係式をマトリックス表示すれば次式のようになる。

$$\omega^{(j)}(\alpha)=\tilde{\boldsymbol{B}}_j(\alpha)^T.\boldsymbol{\omega} \quad ;\tilde{\boldsymbol{B}}_j\equiv\boldsymbol{T}(\alpha)^T.\boldsymbol{B}_j(\alpha) \qquad (3)$$

ここに、$\boldsymbol{\omega}$ は全体節点値ベクトル、$\boldsymbol{B}_j$ は Lagrange 基底およびその微分からなる係数列ベクトルである。また、$\boldsymbol{T}$ はサポート領域内の節点と全体の節点とを結びつける変換マトリックスである。

２）２変数関数

２変数関数の場合も１変数の場合と同様に Lagrange の多項式を用いて離散化を行うことができる。２変数関数の場合には、図２に示したような、評価点 $(\xi,\eta)=(\alpha,\beta)$ を中心とする、１辺の長さが 2ρ の正方

キーワード　　エレメントフリー法、数値解析、Lagrange の多項式、梁、板
連絡先　　〒371-0845　前橋市鳥羽町 580　Tel.027-254-9189　Fax.027-254-9183

形をサポート領域と考える。評価点近傍の２変数関数 $\omega(\xi,\eta)$ は、サポート領域内部の $(N+1)^2$ 個の節点値 ω_{ij} (i,j=0~N)を用いて、次式で表現される。

$$\omega(\xi,\eta)=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\omega_{ij}\varphi_i(\xi)\psi_j(\eta) \qquad (4)$$

ここに、$\psi_j(\eta)$ も $\varphi_i(\xi)$ と同様に定義される Lagrange 基底である。結局、評価点 $(\xi,\eta)=(\alpha,\beta)$ における、たわみの偏導関数は次式のようにマトリックス表示される。

$$\partial_\xi^i\partial_\eta^j\omega(\alpha,\beta)=\boldsymbol{B}_N{}^T(\alpha,\beta).\omega \quad ; \quad N=\sum_{p=1}^{i+j}p+j \qquad (5)$$

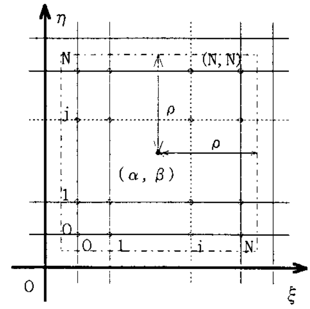
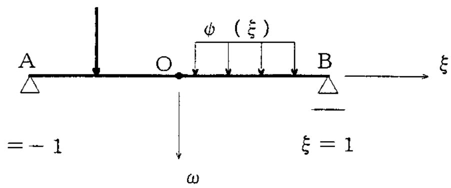


図２．評価点近傍の構造（２次元）

式（５）を用いれば、２変数関数についても任意の評価点における関数値および微分値を、サポート領域内の節点値で表現することができる。

３．梁の定式化

ここでは、具体例として、図３に示した両端単純支持梁の定式化について述べる。対応する汎関数は無次元化して表すと次式で与えられる。



$$\Pi[\omega]=\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega}{d\xi}\right)^2-\psi\omega\right\}d\xi+\frac{\alpha}{2}\left\{\left(\left.\frac{d^2\omega}{d\xi^2}\right|_{\xi=1}\right)^2+\left(\left.\frac{d^2\omega}{d\xi^2}\right|_{\xi=-1}\right)^2\right\} \qquad (6)$$

図３.両端単純支持梁

ここに、ωは無次元化たわみ、φは無次元化荷重、αはペナルティー係数である。

式（３）を式（６）に代入して整理すると、両端単純支持梁の汎関数は次式のように離散化される。

$$\Pi[\omega]=\sum_r\left[\frac{1}{2}\left\{\omega^T.\left(\int_r\tilde{\boldsymbol{B}}_1.\tilde{\boldsymbol{B}}_1{}^T d\xi\right)\omega\right\}-\omega^T.\int_r\tilde{\boldsymbol{B}}_0\psi d\xi\right] \qquad (7)$$

最小ポテンシャルエネルギーの原理 $(\delta\Pi=0)$ に従えば、式（７）から節点値ベクトル ω を決定するための連立１次方程式が得られる。

４．薄板の定式化

図４に示したような、周辺単純支持された薄板の曲げ問題に対する定式化について述べる。対応する汎関数は無次元化した表示で次式のようになる。

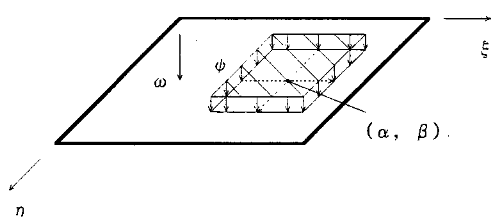


図４．周辺単純支持平板

$$\Pi[\omega]=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}\right)^2+\frac{2(1-\nu)}{\gamma^2}\left\{\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\partial\eta}\right)^2-\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}\right\}\right]-\psi\omega\right\}d\xi d\eta+\frac{1}{2}\oint\left[C_1\omega^2+C_2\left\{\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}\right)^2\right\}\right]d\sigma \qquad (8)$$

ここに、νはポアソン比、γは縦横比、C_1、C_2 はペナルティー係数である。

式（５）を式（８）に代入すれば、薄板の汎関数は次式のように離散化される。

$$\Pi[\omega]=\frac{1}{2}\omega\left[\sum_p\sum_q\iint_{p,q}\left\{(B_3+B_5)(B_3+B_5)^T+\frac{1-\nu}{\gamma^2}\left(2B_4.B_4{}^T-B_3.B_5{}^T-B_5.B_3{}^T\right)\right\}d\xi d\eta\right].\omega-\omega^T\left(\sum_p\sum_q\iint_{p,q}B_0\psi d\xi d\eta\right) \qquad (9)$$

梁の場合と同様に、最小ポテンシャルエネルギーの原理を適用することで、式（９）からたわみ ω を求めるための、連立一次方程式が得られる。

５．まとめ

本研究では、Lagrange の多項式に基づくエレメントフリー法の構築について検討した。具体例として、梁および薄板の曲げ解析に対する定式化を示し、Lagrange を用いた場合でも、容易にエレメントフリー法を構築できることを示した。具体的な数値計算例については、共同研究者が発表する予定である。

参考文献　１）T.Belytschko et. al., Int.J. Numer Methods Engrg.,37(1994)