（Ⅰ－11）　　# 種々の境界条件を有する梁のエレメントフリー解析

群馬高専　学生会員　大山　智
群馬高専　学生会員　猿谷知之
群馬高専　正 会 員　末武義崇

1．研究目的

近年、有限要素法や差分法に代わる新しい解析手法として要素分割を必要としないエレメントフリー法が注目されている。従来のエレメントフリー法では、移動最小二乗法に基づく離散化を行うのが通常であるが、本研究では、Taylor 展開に基づく比較的簡易なエレメントフリー法を構築し、種々の境界条件を有する梁の曲げ解析に適用する。本解法で求めた数値解と厳密解との比較を通じ、梁の境界条件を種々変化させた場合の数値解の精度について定量的に検討する。

2．Taylor 展開を用いた離散化

評価点$x=a$を中心とする半径ρのサポート領域Ω（図１）を考える。評価点近傍の近似関数$f(x)$を次式の有限 Taylor 級数で表す。すなわち、次式である。

$$f(x)=\sum_{j=0}^{N}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^{j} \qquad (1)$$

サポート領域Ω内部のN＋１個の節点値f_i　$(i=1\sim N+1)$と、評価点aにおける近似解とを結びつけるために、$f_i=f(x_i)$ $(i=1\sim N+1)$とすれば、$f^{(j)}(a)$に関する次の連立一次方程式が得られる。

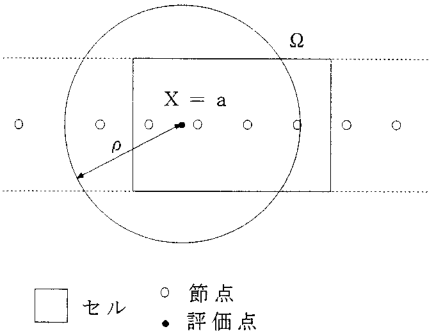

図１.評価点近傍の構造

$$\mathbf{A}(a)\mathbf{F}(a)=\mathbf{f} \qquad (2)$$

ここに、$\mathbf{F}(a)$は、評価点における微係数$f^{(j)}(a)$のベクトルである。式（２）の逆関係式を求めれば、評価点における値$f^{(j)}(a)$　$(j=0\sim N)$が、節点値f_iを用いて次式で表される。

$$f^{(j)}(a)=\mathbf{B}_j(a)^T\mathbf{f} \qquad (3)$$

ここに、$\mathbf{B}_j(a)^T$は、逆行列$\mathbf{A}^{-1}(a)$の第（ｊ＋１）行目の行ベクトルに対応する。なお、式（３）は、Lagrange の多項式を用いた表示と一致する。

変分原理に基づく定式化において、対象となる領域内の積分を数値積分によって評価すれば、各積分点ごとに式（３）を用いることで汎関数を離散化することが可能となる。

3.梁の曲げ解析

梁の曲げ問題に対応する汎関数を無次元化して表示すると次式のようになる。

$$\Pi=\int_{-1}^{1}\{\frac{1}{2}(\frac{d^2\omega}{d\xi^2})^2-\psi\omega\}d\xi+\Gamma\} \qquad (4)$$

ここに、ωおよびψは、それぞれ無次元化されたたわみおよび荷重である。さらにΓは、境界条件を評価する項であり、各境界条件毎に以下のように整理される。

a）両端単純支持

$$\Gamma=\frac{\alpha}{2}\{(\frac{d^2\omega}{d\xi^2}\bigg|_{\xi=1})^2+(\frac{d^2\omega}{d\xi^2}\bigg|_{\xi=-1})^2\}$$

b）両端固定支持

$$\Gamma=\frac{\alpha}{2}\{(\omega|_{\xi=1})^2+(\omega|_{\xi=-1})^2+(\frac{d\omega}{d\xi}\bigg|_{\xi=1})^2+(\frac{d\omega}{d\xi}\bigg|_{\xi=-1})^2\}$$

キーワード　エレメントフリー法，数値解析，Taylor 展開，境界値問題，梁
連絡先　〒371－0845　前橋市鳥羽町５８０　TEL ０２７－２５４－９１８９ FAX ０２７－２５４－９１８３

c）一端固定支持他端自由（片持梁）

$$\Gamma = \frac{\alpha}{2}\{(\left.\frac{d^3\omega}{d\xi^3}\right|_{\xi=1})^2 + (\left.\frac{d^2\omega}{d\xi^2}\right|_{\xi=1})^2 + (\left.\frac{d\omega}{d\xi}\right|_{\xi=-1})^2\}$$

d）一端固定他端単純支持

$$\Gamma = \frac{\alpha}{2}\{(\omega|_{\xi=1})^2 + (\omega|_{\xi=-1})^2 + (\left.\frac{d\omega}{d\xi}\right|_{\xi=-1})^2 + (\left.\frac{d^2\omega}{d\xi^2}\right|_{\xi=1})^2\}$$

ここに、αはペナルティー係数であり、各境界条件をペナルティー関数法を用いて評価するものとした。

4.数値計算例

本研究では、解析対象として、境界条件および荷重条件の異なる種々の梁を選んだ。梁の境界条件については、両端単純支持、両端固定支持、一端固定支持他端自由（片持梁）および一端固定他端単純支持の 4 通りに変化させた。荷重条件については、１個の集中荷重が作用する場合と全体に等分布荷重が作用する場合の２通りを考えた。エレメントフリー法の解析におけるパラメータの選択は、総節点数を２１、サポート半径を$\rho = 0.6$、ペナルティー係数を$\alpha = 10^4$としている。数値積分については Gauss の積分公式を用い、数値積分のために設定したセルの総数は１０とした。

5.解析結果

各梁の両端（$\xi = \pm 1$）、中央点（$\xi = 0$）および$\xi = \pm 0.5$の５点における無次元化たわみωと、無次元化曲げモーメントmの数値解析結果について、エレメントフリー法で求めた結果を表 1 に示した。表には、厳密解と比較した解析誤差を示してある。

表 1 から明らかなように、エレメントフリー法を用いた解析結果は、全体的に比較的良好な精度を示している。荷重条件の違いによる精度の差異を比較してみると、集中荷重を受けるモデルと等分布荷重を受けるモデルとで解析誤差に多少の相違はあるが、ほぼ同程度の精度の解が得られていることがわかる。また、境界条件の違いによって比較した場合、概ね、端部の変形拘束がきつくなるほど解析誤差が大きくなっていく傾向が認められる。この傾向は、構造が非対称な一端固定他端自由および一端固定他端単純の解析結果に明瞭に表れている。すなわち、両者ともに変形拘束のきつい固定端（$\xi = -1$）よりも、拘束のゆるい右端（$\xi = 1$）の方が概ね誤差が小さい。構造が対称な両端単純および両端固定の解析結果に着目すると、たわみについては、梁の端部より中央付近における誤差が小さくなっている。

表 1 .厳密解と比較した解析誤差結果　　単位（%）

		両端単純		両端固定		一端固定他端自由		一端固定他端単純	
		集中荷重	等分布荷重	集中荷重	等分布荷重	集中荷重	等分布荷重	集中荷重	等分布荷重
ξ =−1.0	たわみ	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	モーメント	0.00000	0.00000	5.77868	6.02151	5.14647	5.02690	5.42966	5.58703
ξ =−0.5	たわみ	−0.00405	−0.00033	3.07629	3.70889	1.75207	1.55215	2.55522	2.87162
	モーメント	−0.74863	−0.53321	−0.00063	−1.86967	−1.72565	−1.98628	0.02318	0.00006
ξ =0	たわみ	0.00011	0.00087	2.18367	2.94013	0.47876	0.26749	1.39663	1.63719
	モーメント	−1.84049	−0.95462	−1.26338	1.44439	−0.00199	−1.18998	−0.86402	1.20335
ξ =0.5	たわみ	−0.00405	−0.00033	3.07629	3.70889	0.04170	−0.13925	1.11890	1.20055
	モーメント	−0.74864	−0.53322	−0.00063	−1.86967	−0.00144	0.54266	−1.17858	−0.97833
ξ =1.0	たわみ	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	−0.10872	−0.25471	0.00000	0.00000
	モーメント	0.00000	0.00000	5.77868	6.02151	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

6.まとめ

Taylor 展開に基づくエレメントフリー法を、種々の境界条件を有する梁の解析に適用した。数値計算の結果、いずれの境界条件の場合も本研究のエレメントフリー法を用いることで、概ね良好な近似解が得られることが明らかになった。今後は、連続梁やラーメンなどより複雑な骨組構造物の解析への適用を検討したい。

参考文献

１）T.Belytschko et.al.,Int.J.Numer.Methods Engrg.,37(1994)