（Ⅰ－10）　エレメントフリー法の誤差評価に関する一考察

群馬高専　学生会員　猿谷知之
群馬高専　学生会員　大山　智
群馬高専　正 会 員　末武義崇

1．研究目的

有限要素法や差分法に代わる新しい解析手法として注目されているのが、要素分割を必要としないエレメントフリー法である。エレメントフリー法を用いた解析例については、最近多くの報告がなされているが、誤差評価について検討を行った研究は極めて少ない。井浦ら[1]は、Belytschko ら[2]が考案した移動最小二乗法に基づくエレメントフリー法について、「サポート半径の決定」という観点から解析誤差について検討を行っている。本研究では、Lagrange の多項式を用いた比較的簡明なエレメントフリー法を構築し、その誤差評価について考察する。井浦ら[1]が変位関数の形状に着目しているのに対し、本研究では誤差の評価関数を定義し、具体的な数値計算を通じてその定性的な傾向について論ずる。解析例として、最も簡単な中央点に集中荷重を受ける両端単純支持梁を選び、エレメントフリー法の誤差評価に関する数値計算を実施した。

2．Lagrange の多項式を用いた離散化

評価点近傍の近似関数 $f(\xi)$ を次の Lagrange の多項式で表す。

$$f(\xi)=\sum_{j=0}^{N} f_j\varphi_j(\xi) \qquad (1)$$

ここに、f_i は節点 ξ_i $(i=1\sim N)$ における節点値、$\varphi_i(\xi)$ は Lagrange 基底であり、次式で定義される。

$$\varphi_i(\xi)=\prod_{m=0}^{N} X_{m,i}(\xi) \quad ;\ X_{m,i}(\xi)=\begin{cases}1 & (m=i)\\ (\xi-\xi_i)/(\xi-\xi_m) & (m\neq i)\end{cases} \qquad (2)$$

式（1）を用いれば、評価点 $\xi=a$ における関数値および微分値を、適当に選択した節点の節点値 f_i によって表現することができる。その際、節点の選択について、本研究では評価点 $\xi=a$ を中心とする半径 ρ のサポート領域を考え、サポート内部に属する節点を選ぶ方法を採った。

変分原理に基づく定式化において、対象となる領域内の積分を数値積分によって評価すれば、各積分点ごとに（1）を用いることで梁の汎関数を離散化することが可能となる。

3．誤差評価

関数 $f(\xi)$ を Lagrange の多項式によって近似する場合、誤差の評価関数 $e(\xi)$ は、次式で定義できる。

$$e(\xi)=f(\xi)-\sum_{i=0}^{N} f_i\varphi_i(\xi) \qquad (3)$$

ここで、$f(\xi_i)=f_i$ であるから、$e(\xi_i)=0$ となることを考慮すると、誤差評価関数 $e(\xi)$ は、次式の形に書くことができる。

$$e(\xi)=(\xi-\xi_0)(\xi-\xi_1)\cdots(\xi-\xi_n)Q(\xi)=\prod_{m=0}^{n}(\xi-\xi_m)Q(\xi) \qquad (4)$$

キーワード　エレメントフリー法，数値解析，Lagrange の多項式，誤差評価，梁
連絡先　〒371-0845 前橋市鳥羽町 580 群馬高専　TEL027-254-9189　FAX 027-254-9183

本報では、式（４）右辺の $\prod(\xi-\xi_m)$ を節点座標関数、$Q(\xi)$ を余因子関数と呼ぶことにする。本研究では、節点以外の点における誤差を、式（３）によって評価するとともに、同一点における節点座標関数の値および余因子関数の値を求め、三者の関係について考察する。

４．数値計算例

ここでは、数値計算例として、中央点に集中荷重を受ける両端単純支持梁を選んだ。解析モデルを図１に示す。図中 ξ, ω および ψ は、それぞれ無次元化された座標、たわみおよび荷重を表している。変分原理に基づく定式化において、対象となる領域内の積分を数値積分によって評価すれば、各積分点ごとに式（３）を用いることで梁の汎関数を離散化することが可能となる。両端単純支持梁の汎関数を無次元化して表示すると次式のようになる。

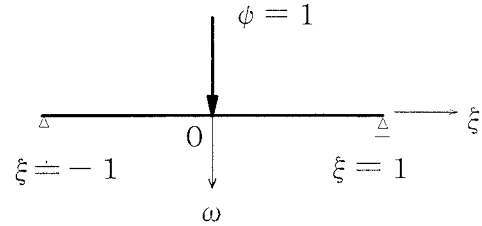

図１．集中荷重を受ける両端単純支持梁

$$\Pi=\int_{-1}^{1}\{\frac{1}{2}(\frac{d\theta}{d\xi})^2-\psi\omega\}d\xi+\frac{\beta}{2}\{(\frac{d\theta}{d\xi}\Big|_{\xi=1})^2+(\frac{d\theta}{d\xi}\Big|_{\xi=-1})^2\} \quad (5)$$

ここに、θ は傾斜角、ω および ψ は、それぞれ無次元化されたたわみおよび荷重である。また、β は、ペナルティー係数である。すなわち、両端の境界条件をペナルティー関数法によって評価するものとした。

数値計算にあたっては、サポート半径 $\rho=0.6$、ペナルティー係数を $\beta=10^4$ とし、１０次の Gauss 積分公式を用いた。総節点数については、２０および１０の２通りについて計算し、両者の比較を行った。

５．数値計算結果

図２から４に、誤差評価に関する数値計算結果を示す。図中、横軸が梁の軸線に対応しており、縦軸は、誤差関数、節点座標関数、余因子関数の値をそれぞれ表している。三者を比較すると、いずれの場合も、梁の中央部で値が小さく、端部で値が大きくなっていることがわかる。すなわち、誤差は梁の中央部では小さく、端部で大きくなる。特に、三者の中で、誤差評価関数と節点座標関数との定性的な傾向が一致していることが特徴的である。このことは、それぞれの問題に固有な解析誤差を、個々の問題とは独立な節点の配置のみによって定まる、節点座標関数 $\prod(\xi-\xi_m)$ によって評価し得ることを示唆している。今回は節点数を１０および２０の２通りに変化させて計算を行ったが、節点数の変化による誤差評価の定性的な傾向に相違は認められない。また、ここで示した解析結果は、規則的な節点配置のモデルに関するものであるが、節点配置を不規則にした場合も同様の結果が得られている。

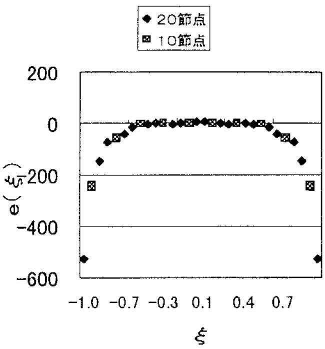

図２．誤差評価関数の分布図

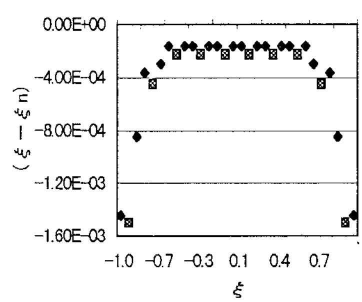

図３．節点座標関数の分布図

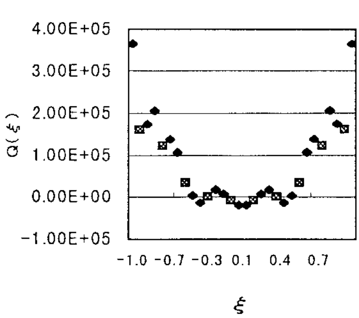

図４．余因子関数の分布図

６．まとめ

本研究の解析結果から、Lagrange の多項式に基づくエレメントフリー法の場合、個々の問題とは独立な、節点配置のみによって誤差を評価し得ることが明らかになった。今後は境界条件や荷重条件を変化させるなど、より広範な数値解析を実施することによって、得られた結論の確認を進めていきたい。

参考文献　1) T.Belytschko et.al., Int. Numer. Methods Engrg., 37(1994).
2)井浦, 他, 土木学会第５２回年次学術講演会, I-A(1997).