（Ⅰ－9）　エレメントフリー法を用いた薄板の曲げ解析

群馬高専　学生会員　高橋信繁
群馬高専　学生会員　今井拓治
群馬高専　正 会 員　末武義崇

1．研究目的

要素分割を必要としないエレメントフリー法は、有限要素法や差分法に代わる、新しい数値解析手法として注目されている。既往のエレメントフリー法としては、Belytschko ら [1]の移動最小二乗法に基づく手法が著名である。本研究では、より簡明なエレメントフリー法を構築するために、Lagrange の多項式を用い、薄板の曲げ解析への適用を試みる。解析対象として、周辺単純支持された薄板を選択し、節点数やセルの総数、数値積分の次数など、種々のパラメータが解析精度に及ぼす影響について、定量的な検討を行う。

2．Lagrange の多項式を用いた離散化

薄板の曲げ問題に対応する全ポテンシャルエネルギーは、次式で与えられる。

$$\Pi = \int_0^b \int_0^a [\frac{D}{2}[(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2})^2 + 2(1-\nu)\{(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\}] - p_0 w]dxdy + \frac{1}{2}\oint [C_1 w^2 + C_2\{(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})^2 + (\frac{\partial^2 w}{\partial y^2})^2\}]dS \quad (1)$$

ここに、w はたわみ、D は板の曲げ剛性、ν はポアソン比、p_0 は荷重、C_1、C_2 はペナルティー係数である。

たわみ $w(x,y)$ は、二変数関数であるから、エレメントフリー法の定式化の際にも、Lagrange の多項式を二変数関数の近似に適用し得るよう拡張する必要がある。すなわち、次式である。

$$w(a,b) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} w_{ij}\varphi_i(a)\psi_j(b) = B_0^{\,T}(a,b)\,\mathbf{w} \quad (2)$$

ここに、$x = a, y = b$ は評価点の座標であり、$\varphi_i(x)$ および $\psi_j(y)$ は Lagrange 基底である。

変分原理に基づく定式化において、対象となる領域内の積分を数値積分によって評価すれば、各積分点ごとに式（2）を用いることで、式（1）を離散化することができる。

3．数値計算

本研究では、全面に等分布荷重が作用する周辺単純支持板を、解析対象として選択した。数値計算に際しては、Gauss 積分の次数、セルの数、節点数、評価点近傍のサポート領域の大きさ（サポートパラメータ）を、表1に示すように種々変化させ、解析を行った。また、式（1）におけるペナルティー係数については、$C_1 = C_2 = 10000$ とした。Fourier 級数解との比較を通じ、解析精度の影響について定量的に検討を行った。

表1．各種パラメータの設定

パラメータの種類	パラメータの値
Gauss 積分の次数	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
セルの数	10×10=100 , 20×20=400 , 30×30=900
節点数	5×5 , 9×9 , 11×11 , 17×17 , 21×21
サポートパラメータ	0.05 , 0.10 , 0.15 , … , 0.90 , 0.95 , 1.00

キーワード　エレメントフリー法，数値解析，Lagrange の多項式，板，線形解析
連絡先　〒371-0845 前橋市鳥羽町 580　TEL 027-254-9189　FAX 027-254-9183

4．解析結果

数値計算全体を通じ、Gauss 積分の次数およびセルの数は、数値解の精度にあまり影響を与えないことが明らかになった。一方、節点数およびサポートパラメータ ρ は、数値計算結果に著しく影響を及ぼすことがわかった。ここでは、これら２つのパラメータが、数値解の精度に及ぼす影響を示す解析結果の例を、幾つか示すことにする。４つの図はいずれも横軸にサポートパラメータ ρ をとり、縦軸にたわみあるいは曲げモーメントの解析誤差を、それぞれとって図示したものである。図１および２は、薄板領域を縦横 10 等分し 121 個の節点を均等に配置した場合の結果であり、図３および４は、縦横 20 等分、節点数 441 個の場合の解析結果である。また、両者共に Gauss 積分の次数は２、セルの総数については 10×10=100 としている。

４つの図を見ると、いずれもサポートパラメータ ρ の変化に伴い、解析誤差が大きく変動することがわかる。また、誤差の変動は、節点数の違いによって全く異なった傾向を示すことが明らかになった。図１および２を見ると、たわみについては、サポートパラメータ $\rho \geq 0.65$ の時、比較的良好な近似解が得られていることがわかる。曲げモーメントについては、サポートパラメータ ρ の値によって、良好な近似解が得られる場合もあるが、全体として誤差にばらつきが見られる。次に、図３および４を見ると、たわみ、曲げモーメント共に、$\rho < 0.6$ の時には解析誤差の変動が激しく、$\rho \geq 0.6$ で解析精度が安定している様子が認められる。今回の数値計算の範囲内では、ρ の増大に伴って誤差が減少している。一番精度の良い ρ=1.0 の場合、たわみの誤差が約 2%、曲げモーメントの誤差が約 26%であり、曲げモーメントについては、良好な結果は得られなかった。

以上のことから、節点数を増加させることが、必ずしも精度の改善につながらないことがわかる。また、サポート領域の大きさについても同様のことが予想されるが、この点については、$\rho > 1$ の場合の数値計算を実施し、さらに解析結果の蓄積を計る必要がある。

5．まとめ

等分布荷重を受ける周辺単純支持板の曲げ解析に関し、本研究のエレメントフリー法によって、比較的良好な近似解が得られることがわかった。今後は、さらに数値計算例の蓄積を計り、最適なサポートパラメータの決定について検討していきたい。

参考文献　1）T. Belytschko et. al., Int. J. Numer. Methods. Engrg., 37(1994)

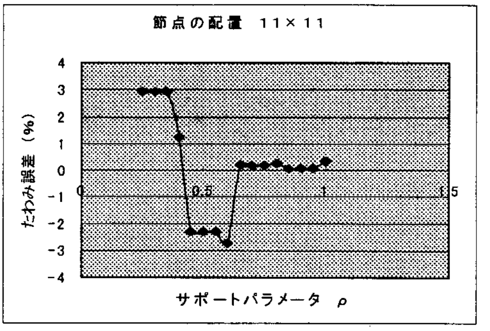

図１．たわみの解析誤差(10×10 分割)

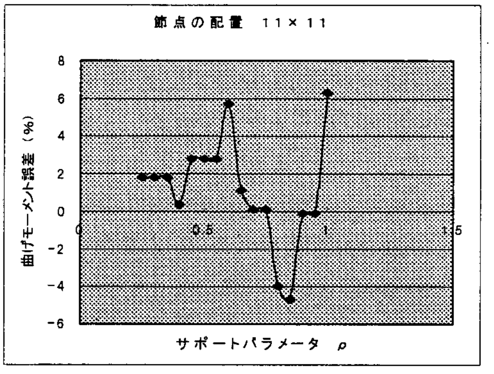

図２．曲げモーメントの解析誤差(10×10 分割)

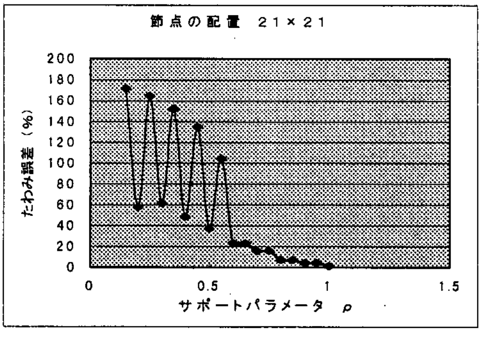

図３．たわみの解析誤差(20×20 分割)

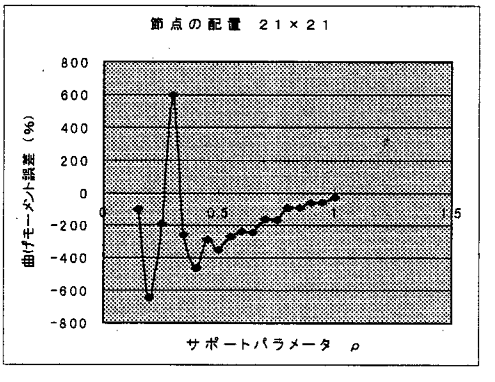

図４．曲げモーメントの解析誤差(20×20 分割)