ＥＦＧ法による梁の幾何学的非線形解析

東京電機大学　学生員　金井塚淳一*
東京電機大学　正会員　井浦雅司*

1.はじめに

構造解析においてこれまで有限要素法が多く用いられているが，最近 Belytschko ら[1]は要素分割を必要としないエレメントフリーガラーキン法（Element Free Galerkin Method，EFGM）と呼ばれる手法を提案した．その手法の特徴は，FEM と異なり要素分割を必要とせず，さらに変位関数の係数が節点における物理量でないことである．線形解析においては EFGM の精度についてこれまで文献[2]において考察を行ってきたが，ここでは幾何学的非線形解析を伴う動的問題を取り上げる．最終目的はマルチボディ動的解析の適用を考えているが，第一段階として Timoshenko 梁の動的問題へ EFGM を適用し，その有用性を考察する．

2.変位関数

Belytschko らが提案している EFGM では，Lancaster らが用いた移動最小二乗法（Moving Least Squares Method）によって変位関数を作成している．その際，物理量でない節点値を用いているが，文献[2]では変位関数を用いて節点値を物理量によって表すことにより，FEM と同様に境界条件を処理できる手法を提案している．マルチボディ動的解析においては，部材の接続が重要であり，部材両端を物理量で表すことが必要であるので，ここでは梁の両端のみを物理量に直す形状関数を考える．

Belytschko らが提案している変位関数 $u^h(x)$は，移動最小二乗法(MISM)により導かれ．

$$u^h(x)=\mathbf{N}(x)\mathbf{u},\quad \mathbf{u}=[u_1,u_2,\cdots,u_{N-1},u_N] \tag{2-1}$$

ここに，N(x)は形状関数，u は節点値ベクトル，Nは節点数である．この変位関数の導出方法を簡単に述べると，まず，評価点 x における変位関数 u(x)の近似関数は，

$$u^h(x)=\sum_j^m p_j(x)a_j(x)\equiv\mathbf{p}^T(x)a(x) \tag{2-2}$$

と表わせる．ここに，$u^h(x)$は関数 u(x)の近似値，$p_j(x)$は空間座標 x を含む多項式，m は展開に用いる項数である．係数 $a_j(x)$は以下のように表される評価関数 J を最小にすることによって得られる．

$$J=\sum_I^n w(x-x_I)\left[\mathbf{p}^T(x_I)a(x)-u_I\right]^2 \tag{2-3}$$

ここに，n は評価点 x 近傍の節点数，$w(x-x_I)$は重み関数，u_Iは点 x_Iにおける節点値である．式(2-3)を a(x)に関して最小化することより，a(x)が求められ，これを(2-2)に代入することにより式(2-1)が求まる．なお，重み関数は以下の式で表わされる．

$$w(d_I)=1-6\left(\frac{d_I}{r}\right)^2+8\left(\frac{d_I}{r}\right)^3-3\left(\frac{d_I}{r}\right)^4 \quad (d_I\le r) \tag{2-4}$$

ここに，d_Iは節点 x_Iと評価点 x との距離であり，rは重み関数のサポートする領域の半径である．

本研究で用いる変位関数の係数は，部材両端の節点値を物理量である節点変位に変換したものであり，以下のように表される．

$$u^h(x)=\mathbf{N}^*(x)\mathbf{u}^*,\quad \mathbf{u}^*=[U_1,u_2,\cdots,u_{N-1},U_N] \tag{2-5}$$

ここに，$N^*(x)$は新たな形状関数，u^*は部材両端の物理量である節点変位 U_1，U_Nと，物理量でない梁の各節点における節点値 u_i（i＝2～N－1）により表わされるベクトルである．また，式(2-5)の変位関数は文献[2]と基本的に同様の手法により求まる．

3.定式化

EFGM による定式化は有限要素法（FEM）のそれとほぼ同じである．すなわち，エネルギー法に基礎をおき，仮定した変位関数により，ハミルトンの原理を用いて運動方程式を導出する．その際，質量マトリックスや剛性ベクトルの積分は，FEM では各要素毎に行われるのに対し，FEGM では解析領域をセルによって分割し，各セル毎に行う．なお，各セルは，節点の位置とは無関係に配置される．今回は各セル内における積分にはガウス積分を用いる．

Key Words：EFG 法，幾何学的非線形，離散化手法

*　埼玉県比企郡鳩山町石坂 東京電機大学理工学部建設工学科　Tel　0492-96-2911

3.1 ハミルトンの原理

運動方程式は以下に示すハミルトンの原理より導かれる．

$$\delta \mathbf{H} = 0 \quad , \quad \mathbf{H} = \int_{t1}^{t2} \left[\mathbf{T} - \mathbf{U}_s - \mathbf{U}_f \right] dt \qquad (3\text{-}1)$$

Hは系の全ポテンシャルエネルギであり，運動エネルギ T，歪みエネルギ U_s，外力に関するポテンシャル U_f により表される．

3.2 歪みエネルギ

有限歪有限変位理論に基づく Timoshenko 梁の理論はこれまで様々な基礎式が提案されているが，ここでは文献[3]において用いられる基礎式を用いる．すなわち，Timoshenko 梁の歪みエネルギ U_s は，

$$\mathbf{U}_s = \int_0^L \left[\frac{EA}{2}(\varepsilon)^2 + \frac{EI}{2}(\kappa)^2 + \frac{GA}{2}(\gamma)^2 \right] dx \qquad (3\text{-}2)$$

と表される．ここに，ε は軸歪，κ は曲率，γ はせん断歪，EA は伸び剛性，EI は曲げ剛性，GA_s はせん断剛性，Lは変形前の軸線の長さである．ここで，梁の軸線に沿った x 方向変位成分をU，それに垂直な y 方向変位成分をV，変形前の断面の回転角を Φ_0，変形後のそれを Φ とすると，厳密な歪と変位の関係式は以下のようになる．

$$\begin{aligned} &\varepsilon = (U' + \cos\Phi_0)\cos\Phi + (V' + \sin\Phi_0)\sin\Phi - 1 \\ &k = \Phi' \qquad (3\text{-}3) \\ &\gamma = (V' + \sin\Phi_0)\cos\Phi + (U' + \cos\Phi_0)\sin\Phi \end{aligned}$$

ここに，( )'=d( ) / dx である．なお，本研究における Timoshenko 梁の有限歪有限変位理論とは，式(3-2)，式(3-3)より表される理論のことを指すものとする．

3.3 運動エネルギ

梁の運動エネルギは文献[3]により以下のように示される．

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}\int_0^L \left[A_\rho(\dot{U})^2 + A_\rho(\dot{V})^2 + I_\rho(\dot{\Phi})^2 \right] dx \qquad (3\text{-}4)$$

ここに，

$$A_\rho = \int m dA, I_\rho = \int m y^2 dA \qquad (3\text{-}5)$$

であり，m は単位体積当たりの質量である．

3.4 外力に関するポテンシャルエネルギ

ここでは後の便のため，物理量である外力を梁の両端のみ作用させると仮定する．この時，外力に関するポテンシャル U_f は以下のように表される．

$$\mathbf{U}_f = P_1U_1 + Q_1V_1 + M_1\Phi_1 + P_NU_N + Q_NV_N + M_N\Phi_N \qquad (3\text{-}6)$$

ここに，P_i，Q_i，M_i (i =1, N)は，梁両端における等価節点力であり，U_i，V_i，Φ_i (i =1, N)は，それらの節点における水平，垂直変位と回転角である．

4. 運動方程式

梁の運動方程式は式(3-2)，(3-4)，(3-6)を式(3-1)に代入し整理すると，以下のようになる．

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{D}}\} + \{\mathbf{K}\} - \{\mathbf{F}\} = \{\mathbf{0}\} \qquad (4\text{-}1)$$

ここに，

$$[\mathbf{M}] = \left[\frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial \dot{D}_i \partial \dot{D}_j} \right] \quad , \quad \{\mathbf{K}\} = \left\{ \frac{\partial \mathbf{U}_s}{\partial D_i} \right\}$$

$$\{\mathbf{D}\} = \{U_1, V_1, \Phi_1, u_2, v_2, \varphi_2 \cdots, U_N, V_N, \Phi_N\}^T$$

であり，{F}は外力ベクトルである．

5. 数値解析法

式(4-1)は二階の微分方程式であるので，次のように節点速度を新たな自由度として加えることにより，一階の微分方程式に変換し，ルンゲクッタ法により積分することにした．すなわち，

$$\xi_1 = \dot{U}_1, \mu_1 = \dot{V}_1, \rho_1 = \dot{\Phi}_1, \xi_2 = \dot{u}_2, \mu_2 = \dot{v}_2, \rho_2 = \dot{\varphi}_2, \cdots$$

とおくと，以下の一階の常微分方程式が得られる．

$$\{\dot{\mathbf{d}}\} = \{\mathbf{G}\} \qquad (4\text{-}2)$$

ここに{G}は{**d**}の関数であり，

$$\{\mathbf{d}\} = \{U_1, V_1, \Phi_1, \xi_1, \mu_1, \rho_1, \cdots, \mu_N, \rho_N\}^T$$

と表される．さらに，式(4-2)に境界条件を挿入し，与えられた初期条件の下で数値積分を行う．なお，計算結果は発表当日に報告する．

【参考文献】

1) T.Belytscko, Y. Y. Lu, L. Gu, 'Element free Galerkin methods', International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.37, 229-256(1994).
2) 井浦，庭山，'Element Free Galerkin Method における基本境界条件の処理 '構造工学論文集 Vol.43A(1997 年 3 月)．
3) M. Iura and S. N. Atluri, Dynamic analysis of planar flexible beams with finite rotations by using inertial and rotating frames. Computers and Structures, Vol.55, No.3, 453-462, (1995).