

(II-96) 分岐理論を用いた富栄養化の発生に関する安定性解析

(株)建設環境研究所 正員 井元 利則

〃 正員 作田 裕

中央大学理工学部 正員 川原 睦人

1. 緒言

近年、湖沼において本来長い歴史の中で生ずる現象が、自然要因の上に人為活動が加算されて、著しく富栄養化速度が加速され、短時間の内に湖沼が富栄養化する現象が起り、その水域での利水上の障害が問題とされている。

そこで本研究では、この富栄養化現象に関する水質予測に対して、その現象が発生する(不安定)か、発生しない(安定)かを分岐理論を用いて有限要素法により解析するという手法を提案するものである。

2. 基礎方程式

ダム貯水池及び湖沼における任意の水質状況は、式(1)、(2)の様式システムで表すことができ、その安定性を解析することにより富栄養化危険率を考えることにする。

$$L\phi = \sigma\phi \quad (1)$$

式(1)においてLは線形作用素を σ は固有値を、 ϕ は固有ベクトルを表している。ここで、

$$L = \begin{bmatrix} D\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \lambda f_{,C_{CI}} & \lambda f_{,C_{IN}} & \lambda f_{,C_{IP}} \\ \lambda g_{,C_{CI}} & D\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \lambda g_{,C_{IN}} & \lambda g_{,C_{IP}} \\ \lambda h_{,C_{CI}} & \lambda h_{,C_{IN}} & D\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \lambda h_{,C_{IP}} \end{bmatrix} \quad (2)$$

3. 富栄養化危険率について

富栄養化危険率は式(1)、(2)で求めた固有モードの固有値 λ から富栄養化現象が出現する時の臨界状態の固有値 λ_{cr} として次のように設定する。

$$\lambda_{cr} = \min \{ \text{Re}(\lambda_i) \} \quad (\lambda_{cr} > 0) \quad (3)$$

すると、式(2)の任意水質状況の固有値 λ を用いて、危険率は、

$$\lambda_{min} = \lambda_{cr} < \dots < \lambda_{max} = \lambda_{cr}$$

として、

$$\text{危険率} = \frac{\lambda}{\lambda_{cr}} \times 100 > 100\%$$

このように求めた危険率と任意の水質状況に対する最適化の結果を以下に示した。

ただ、任意の水質状況の固有値 λ は、平衡解

$$(\lambda \text{ BM-DH}) \phi = 0$$

の固有値として求めた。これは、臨界状態 λ_{cr} を越えた場合は不安定な方向に λ は増大するものと仮定し($\lambda \rightarrow \lambda_{max}$)、その場合式(2)の左辺は正であると考えた。

4. モードの重ね合わせにおける寄与率について

最小危険率 λ_{cr} を越えた状態での水質状況は、固有値 $\lambda_i (i=1 \cdots 10)$ に対応した固有ベクトルに対応した固有モードの重ね合わせにより、次のように表される。

任意の水質： $\tilde{C}_i (i=1 \cdots N \text{ 節点数})$

固有モード： $a_{ij} u_{ij}$

今、任意の水質に対して固有モードの重ね合わせを行うには最小二乗法により、評価関数

$$J = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\tilde{C}_i - \sum_{i=1}^n a_{ij} u_{ij} \right)^2 d\Omega \quad (4)$$

を極値化することにより係数 a_{ij} を求めることができる。

ここで、係数 a_{ij} は、任意水質状況に対する固有モードの寄与を表すことになる。ここで、モードの寄与として次のノルムをとることにする。

$$|\tilde{a}_i| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2} \quad (5)$$

すると各固有モードが任意の水質状況に対して示す寄与は次のように表される。

$$\text{最大寄与： } \max |\tilde{a}_i| = \tilde{A}_{\max}$$

$$\text{最小寄与： } \min |\tilde{a}_i| = \tilde{A}_{\min}$$

任意の水質状況に対する固有モードの寄与率を表 1 に示した。

表 1 モード寄与率

モード	寄与率	モード	寄与率
1	0.39	6	0.01
2	0.07	7	0.01
3	0.25	8	0.01
4	0.19	9	0.00
5	0.07	10	0.01

5. 緒言

今回解析した霞ヶ浦における富栄養化現象に対する結果は、定常な状態（富栄養化現象が発生しない状態）から、アオコ等の植物プランクトンが爆発的に発生する状態への移行を解析したものであり、それは次の 2 つのパラメーターにより表すことができる。

(1) 最小危険率 $\lambda_{\min}$ ……異常な発生率で不安定な状態に入る時の最小のパラメーターである。
したがって、これを越えると富栄養化現象が発生すると定義づけられる。

(2) モードの寄与率 $|\tilde{a}_i|$ ……不安定な状態で、富栄養化現象が発生している状態での発生モードの寄与を表す。したがって、発生したある状態でどのモードが強く影響しているかを表す。

この 2 つのパラメーターは現段階相互には無関係のように考えられるが、安定した状態から不安定な状態へ移行する時の状況を、この 2 つのパラメーターにより解析し、霞ヶ浦での富栄養化現象が発生したある状態での数値的な関係を見出し、今後の解析を行う必要がある。