（II－87）　海浜流の数値解析における開境界処理に関する検討

An Examination of the Open Boundary Treatment in Near-shore Current Analysis

○ 中央大学 学員 大橋　徹也
中央大学 学員 密石　一太
中央大学 正員 川原　睦人

1　はじめに

近年、コンピュータの性能の向上と数値解析手法の進歩に伴い、自然現象の解析において非常に精度の良い結果が得られるようになってきた。しかし、そこには依然幾つかの問題が残されていた。中でも境界条件の精度によって解析結果が左右されるというものはさらに厳密解に近い解を得るためには非常に重要な問題であるといえる。そこで、その問題を解決するためにはどのように自然境界条件を扱うかということを考える必要がでてくる。

その解決策として、次のような方法がある。それは解析領域内部の数値解と領域外部の解析解とを人工的に設置した開境界上で接続する方法で「解析解接続法」と呼ばれるものである。この手法の利点としては、開境界処理を行うことで解析領域を拡張することが不要になるためコンピュータの記憶容量の削減や計算時間の短縮が期待される点である。

本研究は、この「解析解接続法」を海浜流解析に適用し、その妥当性を検討したものである。

2　基礎方程式

基礎方程式として浅水長波方程式の一つである次の式を用いる。

$$\dot{u}_i + u_j u_{i,j} + g\eta_{,i} + \frac{\tau}{h_s}(u_k u_k)^{\frac{1}{2}} u_i - \nu(u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} + \frac{S_{ij,j}}{\rho(h+\eta)} = 0 \qquad (1)$$

$$\dot{\eta} + \{(h+\eta)u_i\}_{,i} = 0 \qquad (2)$$

ここで、u_i は $x_i (i=1,2)$ 方向の流速、g は重力加速度、η は水位変動量、ν は渦動粘性係数、τ は海底摩擦係数、ρ は密度、h_s は水深の要素平均、$S_{ij,j}$ はラディエーションストレスである。

境界条件は開境界 Γ_o 上で $u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad \eta = \bar{\eta}$ であり、ここで¯ 付きは一般解であることを表す。また、陸境界 Γ_L では、$u = \hat{u}, \quad v = \hat{v}, \quad \eta = \hat{\eta}$ であり、ここで^ 付きは既知量であることを表す。

3　開境界処理（解析解接続法）

3.1　有限要素方程式

解析領域は任意の三角形有限要素によって分割される。その三角形有限要素について浅水長波方程式から重み付き残差方程式を導き、ガレルキン法によって補間される。それらを重ね合わせ、有限要素方程式は次のように表される。

$$M_{\alpha\beta}\dot{u}_{\beta i} + K_{\alpha\beta\gamma j}u_{\beta j}u_{\gamma i} - H_{\alpha i\beta}\eta_\beta + \frac{\tau}{h}M_{\alpha\beta}(u_k u_k)^{\frac{1}{2}}_{\beta}u_{\beta i} + \nu(N_{\alpha j\beta j}u_{\beta i} + N_{\alpha j\beta i}u_{\beta i}) + H_{\alpha\beta j}[\frac{S_{ij}}{\rho(h+\eta)}]_\beta + (S^i_{\alpha\mu} + P^i_{\alpha\mu})\underline{\beta^\mu exp(-j\omega^\mu t)} = 0 \quad (3)$$

$$M_{\alpha\beta}\dot{\eta}_\beta + R_{\alpha\beta i\gamma}\eta_\beta u_{\gamma i} + R_{\alpha\beta\gamma i}\eta_\beta u_{\gamma i} - H_{\alpha i\beta}u_{\beta i} + S^\eta_{\alpha\mu}\underline{\beta^\mu exp(-j\omega^\mu t)} = 0 \quad (4)$$

下線部分は未知数であることを示す。

次に、式(3)、(4)の未知数を求めることを考える。

3.2　外部領域の一般解

領域外部において波動方程式から導かれる一般解が存在すると考える。この一般解は基礎方程式（１）、（２）を考慮することで、次のように表すことができる。

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\eta} \end{bmatrix} = \sum_{\mu=1}^{3}\beta^\mu \begin{bmatrix} k^\mu_x\omega^\mu/h(k^\mu)^2 \\ k^\mu_y\omega^\mu/h(k^\mu)^2 \\ 1 \end{bmatrix} exp(-j\omega^\mu t)\, exp\{j(k^\mu_x x + k^\mu_y y)\} \quad (5)$$

ここに、β^μ は未定定数, k_x, k_y はｘ，ｙ方向の波数, ω は角振動数, ｊは虚数単位である。

3.3　未定定数の決定

開境界上の連続条件, 及び（５）式を用いることで（３）、（４）式の未定定数を求めることができ、次のように表される。

$$\beta^{\mu} = W_{\lambda\mu}^{-1} T_{\lambda\gamma} W_{\gamma}^{'} / exp(-j\omega^{\mu} t) \qquad (6)$$

（６）式を（３）、（４）式に代入することで未知数の入っていない完全な形の有限要素方程式を得ることができる。なお、時間方向の離散化には、２段階陽的解法を用いる。

4　数値解析例

数値解析モデルとして、千葉県にある御宿海岸を適用する。この海岸は、海水浴場として有名であり、またアワビの良好な漁場であるが、近年生活排水やゴルフ場建設などによって汚染されてきている地域である。 fig.1 は御宿海岸の有限要素分割図であり、その総要素数は 10595、総節点数は 20684 である。

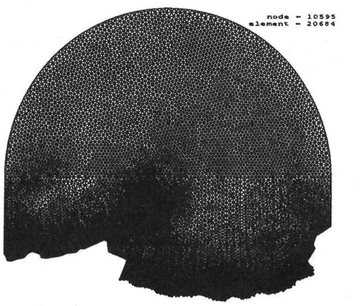

fig.1 有限要素分割図

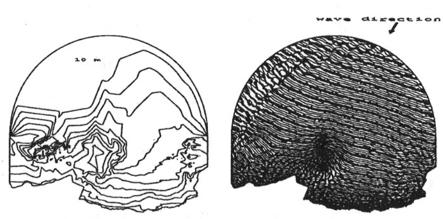

fig.2 水深及び波の位相差

fig.1 に示される領域に fig.2 にある水深及び波高をデータとしてあたえ、従来 使われてきた壁境界での数値解との比較を行った。fig.3 はその結果である。また、fig.4 は境界付近の任意点における水位変動値の収束状況を示したものである。

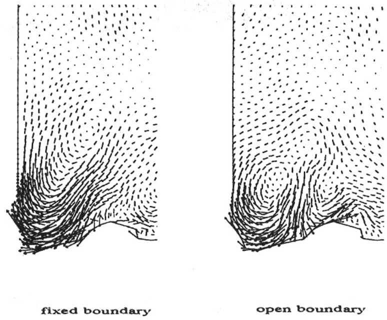

fig.3 流況の比較

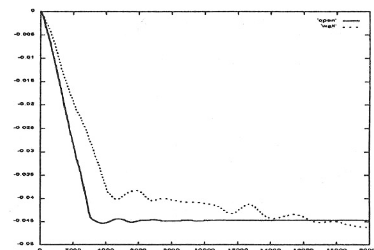

fig.4 解の収束状況の比較

5　おわりに

以上のように、解析解接続法を海浜流計算に適用して、従来用いられてきた壁境界にした場合と比較することで、その効果を検討してみたわけであるが、その効果は境界付近ではっきりとみることができる。開境界処理されたほうにはラディエーションの影響が境界上においても取り入れられ、自然な渦が形成されている。

また、fig.4 からは開境界処理することで領域内部の解に境界での反射が与える影響が極めて軽減できることが分かる。これは、計算時間の短縮にもつながる。

しかしながら、この解（流況）が正しい解であることを示すには、領域を拡張した流況との比較や、さらに多くの場合について比較する必要がある。

参考文献

[1] 川原 睦人：有限要素流体解析、日科技連

[2] 土木学会編 ： 海岸波動

[3] 本間 仁 監修 堀川 清司 編 ： 海岸環境工学 、東京大学出版会

[4] 服部昌太郎 著：海岸工学 、 コロナ社

[5] 小林 和光：浅水長波方程式における開境界処理に関する検討（１９９２）