

(II-83) 有限要素法を用いたカルマンフィルタによる潮汐流解析

中央大学 学生員 ○西脇 康
中央大学 学生員 早川 豊
中央大学 正 員 川原 陸人

1 はじめに

観測データを用いて物理現象をとらえる際、どうしても多少なり観測データにノイズを含んでしまい、データを十分生かしきれないことがある。そこで、このノイズを含んだデータを有効利用するために、カルマンフィルタを用いる。カルマンフィルタは、カルマンゲインを一度計算してしまえば、観測値より状態量を瞬時に求められてしまう。これは現場において観測値を得るたびに推定を行えるので制御などに大変優れていると言える。本研究では、推定地を観測地点だけではなく、有限要素法を用いてほかの地点の状態量も推定している。

2 有限要素解析

2.1 浅水長波流れの基礎方程式

線形化した浅水長波方程式は、

$$\langle \text{運動方程式} \rangle \quad u_i + g\eta_{,i} = 0 \quad (1)$$

$$\langle \text{連続の式} \rangle \quad \dot{\eta} + hu_{i,i} = 0 \quad (2)$$

となる。ここで、 u_i はそれぞれ x, y 方向の流速、 η は、水位変動量を示す。 h は水深、 g は重力加速度である。

2.2 有限要素方程式

三角形要素内部を、内挿補間して重み関数には、ガレルキン法を適用する事により空間方向の離散化を行う。時間方向の離散化にはこれを、陽的オイラー法を用いて有限要素方程式を作ると

$$\tilde{M}_{\alpha\beta} u_{\beta}^{n+1} = \tilde{M}_{\alpha\beta} u_{\beta}^n - \Delta t g H_{\alpha\beta i} \eta_{\beta}^n \quad (3)$$

$$\tilde{M}_{\alpha\beta} \eta_{\beta}^{n+1} = \tilde{M}_{\alpha\beta} \eta_{\beta}^n - \Delta t h H_{\alpha\beta i} u_{i\beta}^n \quad (4)$$

但し、 $\tilde{M}_{\alpha\beta} = e\tilde{M}_{\alpha\beta} + (1-e)M$

e : ランピングパラメーター

となる。

3 カルマンフィルタ

3.1 状態空間モデル

カルマンフィルタの基礎方程式は以下に示す通りである。

$$\langle \text{システムモデル} \rangle \quad x_n = F_n x_{n-1} + G_n v_n \quad (5)$$

$$\langle \text{観測モデル} \rangle \quad y_n = H_n x_n + w_n \quad (6)$$

ここで x_n は、状態ベクトルで u_i, η が入る。

F_n は状態遷移行列で、ここに有限要素マトリックスを使用する事により、空間方向にも広がりを持たせる。また、 G_n は駆動行列、 H_n は観測行列、 y_n は観測値、 v_n はシステムノイズ、 w_n は観測ノイズである。

3.2 定式化

i) システムノイズ、観測ノイズは、ホワイトノイズとする。

ii) 最適推定値 $\hat{x}_k$ 、推定値 x_k^* を式で表すと、

$$\hat{x}_k = E\{x_k | Y_k\}, \quad x_k^* = E\{x_k | Y_{k-1}\} \quad (7)$$

となり、それぞれの分散 Γ は、

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= \text{cov}\{x_k | Y_k\} \\ &= E\{(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T\} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_k^* &= \text{cov}\{x_k | Y_{k-1}\} \\ &= E\{(x_k - \hat{x}_k^*)(x_k - \hat{x}_k^*)^T\} \end{aligned} \quad (9)$$

となる。但し $Y_k = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ とする。

iii) ベイズの定理に ii) を代入すると、以下に示す通り最適推定値、カルマンゲイン、推定誤差分散が得られる。

$$\langle \text{最適推定値} \rangle \quad \hat{x}_k = x_k^* + P_k H_k^T R_k^{-1} (y_k - H_k x_k^*) \quad (10)$$

$$\langle \text{カルマンゲイン} \rangle \quad K_k = \Gamma_k H_k^T (R_k + H_k \Gamma_k H_k^T)^{-1} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \langle \text{推定誤差分散} \rangle \\ P_k &= (I - K_k H_k) \Gamma_k (I - H_k^T K_k^T) + K_k R_k K_k^T \end{aligned} \quad (12)$$

今回、状態遷移行列は定常と考えている為、観測値に依存する所は、最適推定値だけである。そのため、観測値を得るまでにカルマンゲインを求めておけば、順解析により最適推定値が求まる。

4 数値解析例

千葉県御宿海岸周辺において、269 節点 469 要素に有限要素分割された海域について考える。観測点としては図 1 上に示される、6 つの地点である。ここで、1995 年 5 月 19 日から、同年 5 月 22 日までの流速及び、水位変動量の観測値(図 2)を得た。推定の対象は全節点であり、観測値が得られた時間だけ推定した。

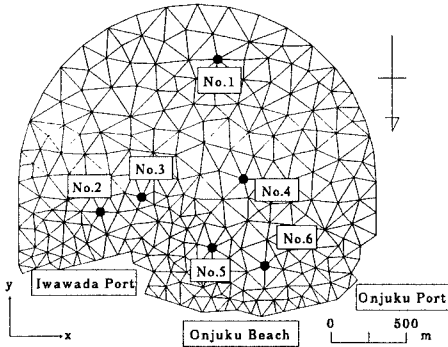


図 1 有限要素分割

まず、ケース 1 として 6 つ全部の観測点を考慮して推定された残差流の結果を図 2 に示す。次に、ケース 2 として No. 2 の観測点を除いた場合の残差流の推定結果を、図 4 に示す。この結果を見る限り、図 3 と図 4 は異なる流速を示した。この理由として、岩和田漁港周辺の流れが複雑あるため、その中でも No. 2 での流れは、この海域における流況を把握するにあたって、非常に重要な地点にあるため、このような結果になったと考えられる。

5 考察

観測点以外においても、本手法を用いて推定ができた。しかし、ケース 2 の様に観測点の配置が悪いと、正しい結果が得られない。観測点の配置は、流域における推定の重要な要因となり、特徴のある観測点をとらないと、うまく推定できない。実際にこの通りになっていたのかは、数値的に確認する事は困難であるが、計算結果によって、流れが集中する場所が得られた。この付近は、ヘドロなどの汚染物質が溜ってしまう所と知られていて、この実現象をうまく捕らえている。このことは、本手法の妥当性が一部示されたといえる。

【参考文献】

- 1) 川原 陸人：有限要素法流体解析，日科技連，(1983)。
- 2) 片山 徹：応用カルマンフィルタ，朝倉書店，(1983)。
- 3) 稲本 耕介：中央大学大学院平成 6 年度修士論文。

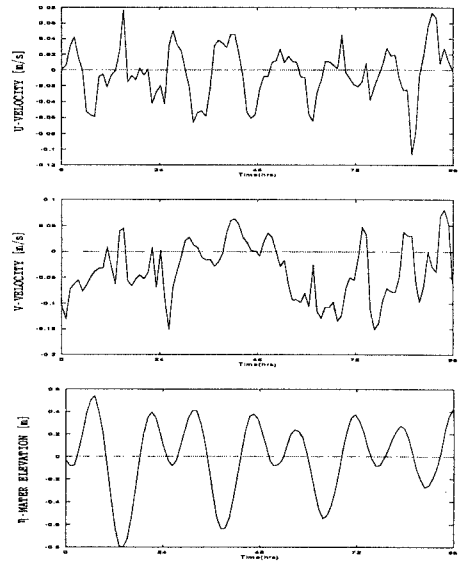


図 2 No. 1. における観測値

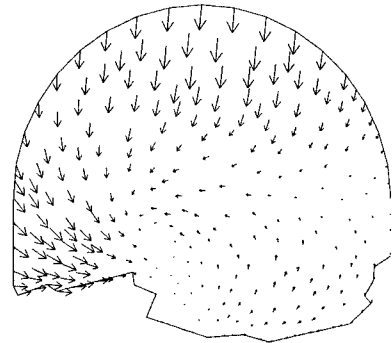


図 3 全観測点を考慮した場合

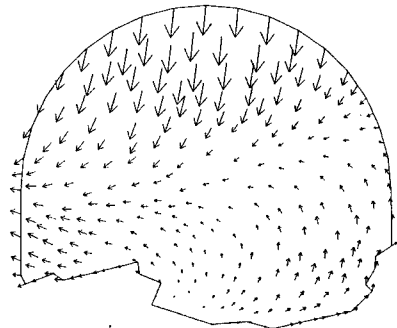


図 4 No. 2 の観測点を除いた場合