

○中央大学 学員 佐久間 清文

中央大学 学員 照井 太一

中央大学 正員 川原 睦人

1 はじめに

日本のように洪水の起こりやすい国では、洪水を制御することは非常に重要な問題であり、ダムや堤防を用いた防災対策が行われているが、ダムに着目した場合特に以下の2点を考慮しなければならない。

- … ダム貯水池内での急激な水位の上昇により、周辺地域の氾濫や越流によるダム構造物の破損・崩壊に対する検討。
- … 制限流量以上の放流をすることにより、下流地域（特に居住地域）の安全をどのように守るかについての検討。

そこで本研究では上記の事を踏まえ客観的に最適な放流量を求めるため、数値計算による拘束条件付最適制御理論を用いたダムの洪水制御を行う。
また洪水の挙動を解析するために浅水長波方程式を基礎方程式とし、それを有限要素法により離散化する。

2 基礎方程式、有限要素法

二次元浅水長波方程式を基礎方程式とし、それを以下の手順で離散化する。

2.1 空間方向の離散化

解析領域を任意の三角形有限要素に分割し、それらに対し重み付き残差方程式を導き、ガレルキン法によって補間すると以下の有限要素方程式を得る。

$$[M]\{\dot{X}\} + [H]\{X\} = \{0\} \quad (1)$$

ここで $\{X\}$ は状態ベクトル $[M], [H]$ はそれぞれ係数行列を表す。

2.2 時間方向の離散化

有限要素方程式 (1) に対して、2段階陽的解法をもちいて時間積分を行うものとし、各ステップは以下の方程式で表される。

$$\{U^{n+\frac{1}{2}}\} = [\bar{M}]^{-1} [\bar{M}]\{U^n\} - \frac{\Delta t}{2} [\bar{M}]^{-1} [H]\{U^n\} \quad (2)$$

$$\{U^{n+1}\} = [\bar{M}]^{-1} [\bar{M}]\{U^n\} - \Delta t [\bar{M}]^{-1} [H]\{U^{n+\frac{1}{2}}\} \quad (3)$$

3 最適制御理論

有限要素方程式 (1) を最適制御理論に用いるため以下のように変形する。

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + [B]\{u\} + [C]\{f\} \quad (4)$$

ここで $\{x\}, \{u\}, \{f\}$ はそれぞれ状態ベクトル、操作ベクトル、外力ベクトルである。そして $\{x\}, \{u\}$ を用いて、評価関数を以下のように定義する。

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\{x\}^T [S] \{x\} + \{u\}^T [R] \{u\}) dt \quad (5)$$

ここで $[Q], [R]$ 重み行列を表す。

また、評価関数 (5) に状態方程式 (4) をつけることで、ハミルトニアンは以下のように表すことができる。

$$[H] = -\frac{1}{2} (\{x\}^T [S] \{x\} + \{u\}^T [R] \{u\}) + \{p\}^T ([A]\{\dot{x}\} + [B]\{u\} + [C]\{f\}) \quad (6)$$

ここで $\{p\}$ はラグランジュ乗数を表す。

オイラー方程式、横断性の条件より以下の式を得る。

$$\{\dot{p}\} = -\frac{\partial [H]}{\partial \{x\}} = [S]\{x\} - [A]^T \{p\} \quad (7)$$

$$\{p(t_f)\} = \{0\} \quad (8)$$

(7) に対しても2段階陽的解法を用いる。

最適制御理論における共役勾配法は操作量に拘束条件がない場合の最適操作量を求める手法であるが、これにクリッピングオフ手法を導入することで操作量に拘束条件がある場合についても評価関数を最小にするための計算を行うことができる。

まず、操作量の拘束条件を以下のように設定し、全制御対象時間を飽和区間と不飽和区間に分割する。

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max} \quad (9)$$

評価関数の勾配 J_u を求め、これを評価関数最小化のための探索方向 $s^{(0)}$ とする。

$$s^{(0)} = -J_u^{(0)} \quad (10)$$

評価関数の勾配は (11) 式より求められ、以下のように示される。

$$J_u = -H_u = [R]\{u\} - [B]^T \{p\} \quad (11)$$

$i(i \geq 1)$ 回目の探索方向、 $s^{(i)}$ は係数 $\beta^{(i)}$ を用いて以下のように表す。

$$s^{(i)} = \begin{cases} -J_u^{(i)} + \beta^{(i)} s^{(i-1)} & (t \in U) \\ -J_u^{(i)} & (t \in S) \end{cases} \quad (12)$$

評価関数 (5) を最小にするためのステップ長さ $\alpha^{(i)}$ は放物線近似法によって求められ、それを $\alpha_{\min}^{(i)}$ とする。

$$J(\{u^{(i)}\} + \alpha^{(i)} \{s^{(i)}\}) \quad (13)$$

操作量 $u^{(i)}$ は $\alpha_{\min}^{(i)}$ によって更新される。

$$\{u^{(i+1)}\} = \text{sat}(\{u^{(i)}\} + \alpha_{\min}^{(i)} \{s^{(i)}\}) \quad (14)$$

以上の事柄を、評価関数が収束条件を満たすまで繰り返す。

3.1 アルゴリズム

- 1. 飽和していない初期操作量 $\{u^{(0)}\}, t \in [t_0, t_f]$ を選ぶ。
- 2. $\{x(u^{(0)})\}, \{p(x^{(0)})\}, J_u^{(0)}$ を計算する。
- 3. $s^{(0)}$ を計算し $i = 0$ とおく。
- 4. $\beta^{(i)} (i \geq 1), s^{(i)}$ を計算する。
- 5. $J(u^{(i)} + \alpha^{(i)}s^{(i)})$ を最小にする α_{min} を求める。
- 6. $u^{(i+1)}$ を計算する。
- 7. $\{x(u^{(i+1)})\}, \{p(x^{(i+1)})\}, J_u^{(i+1)}$ を計算する。
- 8. $e = \sum_{k=1}^n \|\{u^{(i)}(k)\} - \{u^{(i-1)}(k)\}\|$ を計算する
もし $e \leq \varepsilon$ ならば
 $i = i + 1$ として、5へ行く。

4 数値解析例

数値解析例として、栃木県にある川治ダムをモデルとする。
Fig.1は有限要素分割図で、総節点数 241、総要素数 359 である。
Fig.2, Fig.3は洪水流入点での流入量とその時の水位変動量を示し、Fig.4, Fig.5はダムゲートでの放流量と水位変動量を示す。
また、 Δt 1.2 秒、全制御対象時間を6時間として計算を行った。
またダムゲートでの最大放流量、最小放流量をそれぞれ 3.3, 0.5 (m³/sec) とした。(ただし Fig.3, Fig.5 において実線が制御をした場合、破線が制御を行った場合の結果である。)

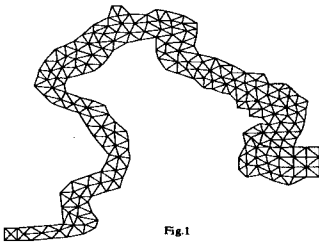


Fig.1

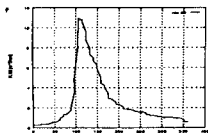


Fig.2

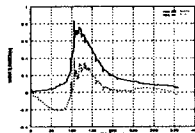


Fig.3

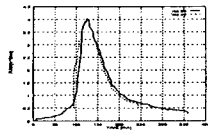


Fig.4

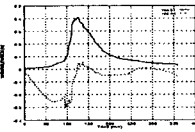


Fig.5

5 おわりに

Fig.3, Fig.5の各点において制御を行わない場合と比べ貯水池内の水位を十分に下げることができたと見え、クリッピングオフ共役勾配法はダムの最適放流量計算においても有効であることがわかった。しかし、最適制御は全制御対象時間の状態量が予め分かっている必要があるので、リアルタイムでの制御を行なうことはできない。そこで、今後はリアルタイム制御手法として予測制御法、ファジー制御法の検討をする必要がある。

参考文献

- [1] 川原 睦人, 吉田 裕, "新体形土木工学・有限要素法", 技報堂, (1983) .
- [2] 島田 芳朗, "ダム放流量の最適制御に関する研究", 修士論文, (1993) .
- [3] 柴田 徹也, 他, "土木へのアプローチ", 技報堂.