

(II-29) 空気が閉じこめられている管路内の流れにおける 圧力波の水中伝播速度の算定式の誘導

早稲田大学理工学部 正会員 鮎川 登
早稲田大学大学院 学生会員 谷沢 克矢
早稲田大学大学院 学生会員 梅田 博志
(株)荏原製作所 新井 和敏

1.はじめに

都市河川の治水対策のひとつとして考えられている地下放水路の流れについて実験を行ったところ、図1に示すように、トンネル部に被圧された空気が閉じ込められる現象が見られた。地下放水路の流れは運用の仕方によっては開水路の流れと管路の流れが共存することになるが、そのような流れの解析にはスロットモデルが用いられていることが多い。

被圧された空気がトンネル内に閉じ込められている場合の流れをスロットモデルを用いて解析するためには、被圧された空気がトンネル内に閉じ込められている場合の圧力波の水中伝播速度を求めることが必要になる。ここでは、そのような流れにおける圧力波の水中伝播速度の算定式を導くことを試みる。

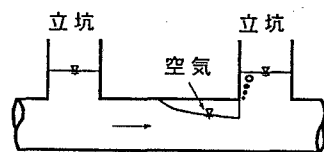


図 1

2.被圧された空気がトンネル内に閉じ込められている管路の流れの支配方程式

(1)連続方程式

水、空気および管路の圧縮性を考慮する場合の連続方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial(\rho_w A_w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_w v A_w)}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \left(A_w \frac{\partial \rho_w}{\partial p} + \rho_w \frac{\partial A_w}{\partial p} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \rho_w A_w \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

ここで、 ρ_w は水の密度、 A_w は水の部分の断面積、 v は水の流速、 p は圧力である。

$\partial \rho_w / \partial p$ は水の体積弾性係数を K_w とすると、次のように書かれる。

$$\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial p} = \frac{1}{K_w} \quad ; \quad \frac{\partial \rho_w}{\partial p} = \frac{\rho_w}{K_w} \quad (2)$$

圧力の変化に伴う水の部分の断面積の変化率 $\partial A_w / \partial p$ は、圧力の変化による空気の部分の断面積の変化率 $\partial A_a / \partial p$ と管路の断面積の変化率 $\partial A / \partial p$ によってもたらされる(図2)。すなわち、

$$\frac{\partial A_w}{\partial p} = -\frac{\partial A_a}{\partial p} + \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right) \frac{\partial A}{\partial p} \quad (3)$$

ここで、 A_a は管路内の空気の部分の断面積、 A は管路の断面積、

θ は図2に示す角(ラジアン)である。

圧力の変化に伴う空気の部分の断面積の変化率 $\partial A_a / \partial p$ は、管路内の空気の圧縮による変化率 $(\partial A_a / \partial p)_1$ と、管路内に閉じこめられた空気の一部が立坑から排出されることによる変化率 $(\partial A_a / \partial p)_2$ によってもたらされる。

$(\partial A_a / \partial p)_1$ は、空気の体積弾性係数 K_a を用いて、次のように表示されるものとする。

$$\frac{1}{K_a} = -\frac{1}{V_a} \frac{\partial V_a}{\partial p} = -\frac{1}{A_a} \left(\frac{\partial A_a}{\partial p} \right)_1 \quad ; \quad \left(\frac{\partial A_a}{\partial p} \right)_1 = -\frac{A_a}{K_a} \quad (4)$$

ここで、 V_a は管路内に閉じこめられた空気の体積である。

$(\partial A_a / \partial p)_2$ は次式によって表示されるものと仮定する。

$$\left(\frac{\partial A_a}{\partial p} \right)_2 = -\beta A_a \quad (5)$$

ここで、 β は係数である。

式(4)および式(5)の関係を用いると、 $\partial A_a / \partial p$ は次のように表示される。

$$\frac{\partial A_a}{\partial p} = \left(\frac{\partial A_a}{\partial p} \right)_1 + \left(\frac{\partial A_a}{\partial p} \right)_2 = -\left(\frac{1}{K_a} + \beta \right) A_a \quad (6)$$

圧力の変化に伴う管路の断面積の変化率 $\partial A / \partial p$ は、管路の水撃現象の連続方程式の誘導を参考にすると、次の

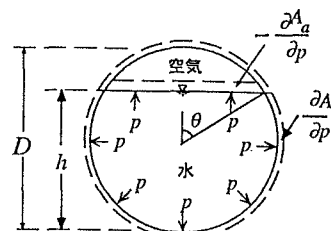


図 2

ように表示される。

$$\frac{\partial A}{\partial p} = \frac{DA}{E\delta} \quad (7)$$

ここで、 D は管路の内径、 δ は管路の壁厚、 E は管材料の弾性係数である。

式(6)および式(7)を式(3)に代入すると、次のようになる。

$$\frac{\partial A_w}{\partial p} = -\left(\frac{1}{K_a} + \beta\right)A_a + \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right)\frac{DA}{E\delta} \quad (8)$$

式(2)および式(8)を式(1)に代入すると、水、空気および管路の圧縮性を考慮する場合の水の流れの連続方程式として次式が得られる。

$$\left\{\frac{\rho_w}{K_w}A_w + \rho_w\left(\frac{1}{K_a} + \beta\right)A_a + \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right)\frac{\rho_w D}{E\delta}A\right\}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + v\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \rho_w A_w \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

式(9)は圧力波の伝播速度 c およびピエゾ水頭 $H = p/\rho_w g + z$ (z はトンネル断面の中心の基準面からの高さ)を用いると、次のように書き換えられる¹⁾。

$$\left\{\frac{\rho_w}{K_w}A_w + \rho_w\left(\frac{1}{K_a} + \beta\right)A_a + \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right)\frac{\rho_w D}{E\delta}A\right\}\left(1 + \frac{v}{c}\right)\frac{\partial H}{\partial t} + \rho_w A_w \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

(2)運動方程式

管路の非定常流の運動方程式は、摩擦損失を無視すると、次のように表示される¹⁾。

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + g\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \left(1 + \frac{v}{c}\right)\frac{\partial v}{\partial t} + g\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

3. 被圧された空気が管路内に閉じ込められている場合の圧力波の水中伝播速度

圧力波の伝播速度 c が水の流速 v に比し非常に大きいものとして、式(10)および式(11)で v/c を1に比し無視した式から v を消去すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \quad (12)$$

ここで、

$$c = \sqrt{\frac{K_w}{\rho_w} \left/ \left\{ 1 + (1 + \beta K_a) \frac{K_w A_a}{K_a A_w} + \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right) \frac{K_w D}{E \delta} \frac{A}{A_w} \right\} \right.} \quad (13)$$

である。

式(12)は波動方程式であり、式(13)で表示される c が管路内に被圧された空気が閉じこめられている場合のピエゾ水頭 H の変化、すなわち、圧力波の水中伝播速度を表すことになる。なお、 $A_a = 0$ および $\theta = 0$ とすると、式(13)は管路内に空気が閉じこめられていない場合の圧力波の水中伝播速度を与える式になる。

内径 D が $10m$ 、壁厚 δ が $0.65m$ の鉄筋コンクリートの地下放水路の場合について、水の密度 ρ_w を $1,000 \text{ kg/m}^3$ 、水の体積弾性係数 K_w を $2.2 \times 10^9 \text{ Pa}$ 、鉄筋コンクリートの弾性係数 E を $3.5 \times 10^9 \text{ Pa}$ とし、管路内に閉じこめられた空気の排出の影響を表す係数 β をパラメータとして、式(13)により圧力波の水中伝播速度 c を計算し、水深と管路の内径の比 h/D および空気の部分の断面積と管路の断面積の比 A_a/A の関係として示すと、図3のようになる。図3によると、管路の流れにおける圧力波の水中伝播速度は管路内に空気が閉じこめられる場合には非常に小さくなること、および、空気が立坑から排出されると、さらに小さくなることからわかる。

4. おわりに

管路の頂部に被圧された空気が閉じ込められている場合の圧力波の水中伝播速度の算定式[式(13)]を導いた。今後は実験を行い、式(13)の妥当性を検討するつもりである。

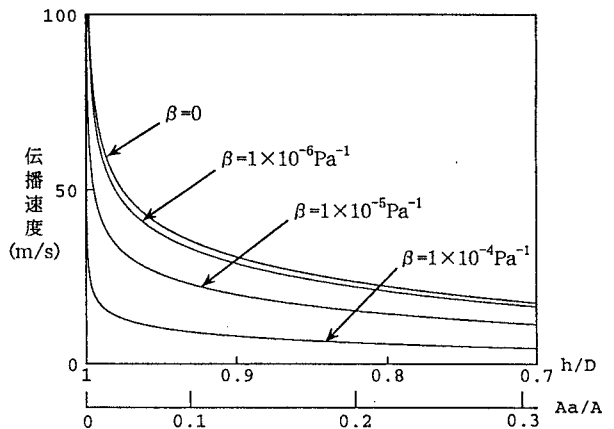


図3 圧力波の水中伝播速度

参考文献：1) 椿 東一郎：水理学Ⅱ，森北出版，pp.4～7,1974.