（II－8）　鉛直不飽和浸透流の新計算法

東京工業大学大学院　学生員　鈴木伴征
東京工業大学大学院　学生員　入江光輝
東京工業大学総理工　正　員　石川忠晴

1．はじめに

地下水の保全・涵養を定量的に計画するためには、雨水の鉛直不飽和浸透流から飽和浸透流に至る一連の過程の数値シミュレーションが有効である。しかし、その過程の物理的・数学的記述方法には、依然として不明確な点もある。その一つに、水分量と圧力ポテンシャルの関係が飽和浸透流と不飽和浸透流におけて異なることによる、浸潤面付近での「離散化手法」の問題がある。従来の研究ではこの点に関する注意は十分払われていない。そこで、本研究では時空間アイソパラメトリック要素を用いた有限要素法によって、飽和・不飽和境界が要素境界と常に一致する計算法を提示する。また、その特殊な場合として、状況に応じて三角形要素を裏返して計算することにより効率的な数値計算が可能であることを示す。

2．対象とする問題

本研究では、図－1に示すような鉛直一次元不飽和浸透流を取り扱う。給水は地表面と地盤下端から行われるものとする。なお、図－1において q_S は地表面の鉛直下向き流量、q_B は不飽和層下端の鉛直下向き流量、ψ_{cr} は限界サクションを示している。解析の基礎方程式として Richerds の式 [1] を用いる。

$$C(\psi)\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left\{K_s(\psi)\left(1+\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right\} \qquad (1)$$

ここに、ψ は圧力ポテンシャル、$K_S(\psi)$ は不飽和透水係数、$C(\psi)$ は比水分容量を表している。

3．計算式の導出

定式化にあたり、まず式(1)に重み関数を乗じて時空間で積分することにより Galerkin 方程式を求める。次に、要素分割にはアイソパラメトリック一次要素を用いる。(図－2参照）なお、要素の時間長は一定（ΔT）とし、要素の空間長も最下端の要素を除くと一定（ΔZ）とする。最下端の要素は、不飽和浸透域が変動することから台形となり、その寸法は図中に示す ΔZ_1, δz で表記される。

本研究では飽和・不飽和境界と要素境界を常に一致させるために各時間ステップ毎に浸潤面移動量（δz）を求める必要があるのだが、図－2に示す台形要素を用いると全体マトリクスの中に未知数 δz が含まれるため収束計算を行わなければならなくなる。しかし、図－2の ΔZ_1 がゼロの場合、δz を全体マトリクスから外すことができる。この場合、台形要素は三角形要素になる。

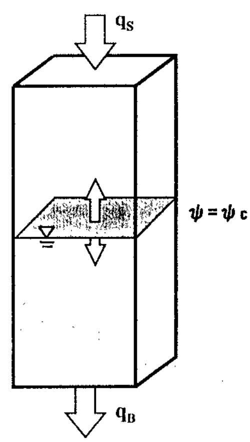

図-1　対象とする問題
（一次元鉛直不飽和浸透流）

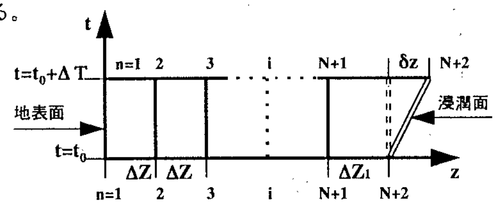

図-2　時空間アイソパラメトリック要素

最終的に解くべき方程式はサクション ψ と δz を未知数とするマトリクス方程式で表されるが、その全体マトリクスは三重対角行列であるから未知数 ψ を上端から順に消去できる。ここで下端において $\psi=1$ であることを考慮すると、マトリクス方程式から δz と q_B の関係式が

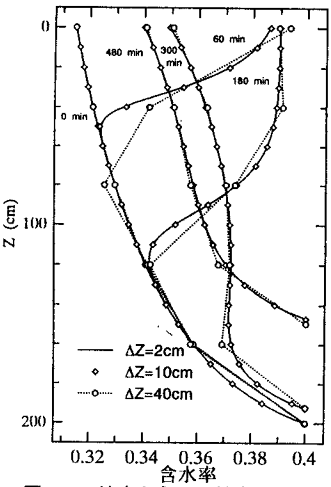

図-3-1 地表からのみ給水した場合

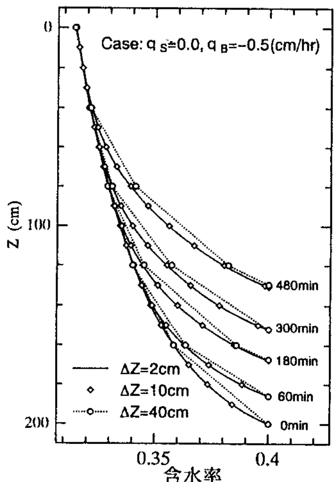

図-3-2 地盤側からのみ給水した場合

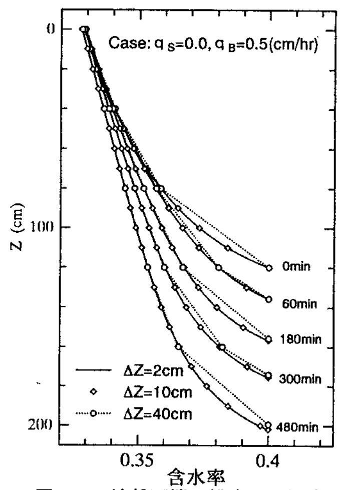

図-3-3 地盤下端で排水した場合

導かれる。したがって、q_Bに適当な値を与えるとδzが求められ、その後に三重対角行列を消去する際に求められた関係式を用いて順にϕを求めることができる。なお、q_Bは飽和浸透流と接続する場合は未知数となるが、本研究では浸潤面移動の計算に重点を置いているためq_Bを外部から与える定数として計算を行っている。　三角形要素を用いる場合、浸潤面が下降する際には要素が正の方向に伸びるだけであるから、台形の場合との違いは生じない。しかし浸潤面が上昇する際には、三角形要素は裏返る為その時間ステップの始めに設定した要素の中に三角形要素が食い込んでいくことになる。そこで、このことが数学上の問題を生じないかどうか調べる必要がある。今回は紙面の都合上載せることが出来ないが、補完関数が一次式の場合は少なくとも問題を生じないことが証明されている。

4．数値計算

前章に述べたような計算方法を用いて、３通りの条件によって数値計算を行った。計算結果は、図-3-1が地表面から$q_s = 1.0$ (cm/hr)、地盤下端から$q_B = 0.0$ (cm/hr)を与えた場合、図-3-2が地盤下端からのみ給水した場合、図-3-3が地盤下端で給水した場合の時間の経過に伴う不飽和層の含水率の変化を示している。いずれの図もΔZ=2 cm, 10 cm, 40 cm の 3通りについて計算を行っており、ΔZがかなり粗い場合でも細密メッシュを用いて計算した結果と良く一致していることが分かる。また、図-3-1をみると時間の経過に従い地表面から水分が浸透していく様子が伺える。さらに水分の浸透に伴って要素境界(最下端接点)が上方へ移動している様子も伺えるが、これは水分の浸透によって不飽和層が下方から飽和して、飽和・不飽和層の境界が上昇して行くからである。図-3-1、図-3-2についても飽和・不飽和境界における給水・排水の結果、要素境界が領域境界の変動と共に変化していることが分かる。

5．おわりに

本論文では不飽和域と飽和域の境界部分を合理的に取り扱う計算スキームについて検討し、時空間アイソパラメトリック要素に裏返し技法を組み合わせた新しい計算法を提案した。この方法は積分時間ΔTの間で浸潤面が常に要素境界に一致した完全陰解法であり、要素長をかなり大きくとっても、浸潤面が移動する場合の鉛直不飽和浸透流を精度良く計算できることが示された。

参考文献　1) 虫明功臣ほか：水環境の保全と再生、山海堂、1987.