

(I-53) 安定化有限要素法による非圧縮粘性乱流解析

○ 中央大学大学院 学生員 宮森 俊和
中央大学大学院 学生員 猪股 渉
中央大学 正会員 櫻山 和男

1 はじめに

様々な大きさの渦を伴って複雑な運動を行なう乱流において、最小スケールの渦による乱れの散逸構造まで表すためには、膨大な節点および計算機容量が必要とされ、現在のコンピュータでは、直接計算 (DNS: Direct Numerical Simulation) により取り扱えるレイノルズ数に限界がある。したがって、高レイノルズ数流れを解析するためには、乱流モデルを導入する必要があると言える。

そこで本研究では、Q1/P0 要素に基づく安定化有限要素法^[1] (安定化行列および SUPG 法) による DNS と、これをベースにした、通例の Smagorinsky モデル^[2] による LES (Large Eddy Simulation) 乱流モデルとの比較を、円柱周りの流れ解析について行ない、乱流モデルの有効性を検討することを目的とする。

2 解析手法

2.1 LES の基礎方程式

LES では、流速や圧力などの物理量 f を、(1) 式のよう

$$f = \bar{f} + f' \quad (1)$$

ここで、 $\bar{f}$, f' は、要素より大きいスケール (GS: Grid Scale) と小さいスケール (SGS: Sub Grid Scale) の流れ場である。このフィルター化操作を、無次元化されたナビエ・ストークスの運動方程式とオイラーの連続方程式に施して、Smagorinsky モデル^[2] を導入すると、基礎方程式 (2), (3) が得られる。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \bar{u}_{i,j} + \bar{P}_{,i} = \left(\frac{1}{R_e} + \nu_{SGS} \right) \bar{u}_{i,jj} \quad (2)$$

$$\bar{u}_{i,i} = 0 \quad (3)$$

$$\nu_{SGS} = (Cs\Delta)^2 \sqrt{\bar{u}_{i,j}(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i})} \quad (4)$$

$$\bar{P} = \bar{p} + \frac{2}{3} k_{SGS} \quad (5)$$

ここで、 $_{,i}$ は i 方向の偏微分、 u_i は i 方向の流速、 p は圧力、 R_e はレイノルズ数、 ν_{SGS} は SGS の渦粘性、 C_s は Smagorinsky 定数、 Δ は各要素のスケール、 k_{SGS} は SGS の乱流エネルギーを表す。また、(2) 式の移流項において、Leonard 項と Cross 項は無視されており、(5) 式において、SGS の乱流エネルギーは圧力に組み込み、モデル化していない。

2.2 時間方向および空間方向の離散化

本研究では、時間方向の離散化は Gresho の準陽解法^[1] に基づき、流速を陽的・圧力を陰的に扱い、空間方向の離散化は SUPG 法^[1] に基づく重み付き残差法を用いて、有限要素により離散化する。ただし、GS 成分の物理量を表す上付きの n を省略している。

$$\frac{M_C u_{\beta i}^{n+1} - M_C u_{\beta i}^n}{\Delta t} + K(u_j^n) u_{\beta i}^n = M_C M_L^{-1} C \cdot P_{\beta}^{n+1} - \left(\frac{1}{R_e} + \nu_{SGS}^n \right) S \cdot u_{\beta i}^n \quad (6)$$

ここで、 K, C, S は各係数行列であり、特に M_C はコンシステントな質量行列、 M_L は集中化質量行列である。そして、運動方程式の離散化により得られる有限要素方程式 (6) と連立方程式の離散化により得られる有限要素方程式とを連立させると、連立 1 次方程式 (7) が得られる。

$$\begin{bmatrix} M_C & -M_C M_L^{-1} C \\ C^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{\beta i}^{n+1} \\ \Delta t \cdot P_{\beta}^{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_{\beta i}^n \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

ここで、 $b_{\beta i}^n$ は運動方程式の既知項をまとめたものであり、記憶容量低減のために最終行を掃き出し、圧力のポアソン方程式 (8) を導くことができる。

$$(C^T M_L^{-1} C) \Delta t \cdot P_{\beta}^{n+1} = -C^T M_C^{-1} b_{\beta i}^n \quad (8)$$

圧力の離散化にのみ集中化質量行列を用いて近似したため、ポアソン方程式を解く際には M_L 、運動方程式を解く際には M_C 、という 2 種類の質量行列を用いることが可能になる。

2.3 Q1/P0 要素のための安定化行列

(7) 式において、係数行列の右下部が 0 になることにより、境界条件によっては、得られる数値解にチェッカーボード状の振動が起こる。これを避けるために、右下の 0 部分に拡散型の行列 D を代入するというのが、安定化行列^[1] の考え方である。この安定化行列は、ある四角形要素の第 0 要素 (4 つの辺を共有する要素をそれぞれ第 1~4 要素とした場合) について書き下すと、(9) 式のようにになる。

$$D_{0k} P_k = a_{01} a_1 (P_0 - P_1) + a_{02} a_2 (P_0 - P_2) + a_{03} a_3 (P_0 - P_3) + a_{04} a_4 (P_0 - P_4) \quad (9)$$

ここで、 a_i は要素 i ごとに決められる、無次元パラメータ α を含む安定化パラメータであり、(10) 式で与えられる。

$$a_i = \alpha \sqrt{(C^T M_L^{-1} C)_{ii}} \quad (10)$$

3 円柱周りの流れ解析

数値解析例として、円柱周りの流れ解析のDNSを、レイノルズ数が $Re = 10^2 \sim 10^6$ の場合について行なった。なお、無次元パラメータは $\alpha = 0.25$ とした。

具体的に、まず2次元解析では、図1に示すように、解析領域に対して円柱の直径を D と定義し、有限要素分割（節点総数 4270、要素総数 4166、最小メッシュ幅 $0.006D$ ）をした。また3次元解析では、図1、図2に示すように、高さ $3D$ を円柱のスパン方向に60層に分割した。なお、3次元解析の初期値には、2次元解析によって得られた発達したカルマン渦流れを各層に積み重ねて与え、初期において鉛直方向に攪乱を与えた。

図3に、抗力係数・ストローハル数の解析結果を示す。図より、DNSの3次元解析では、抗力係数・ストローハル数の低下する現象を捉えることができ、実験値との比較においても定性的に良い一致を示している。また図4、図5に、レイノルズ数が $Re = 10^2, 10^5$ の場合の圧力図を示す。図より、 $Re = 10^5$ の場合には3次元性が強く見られることが判る。

4 おわりに

本論文では、Q1/P0要素に基づく安定化有限要素法によるDNSのみを行なった。DNSの3次元解析では、実験結果と定性的に良い一致が見られた。なお、Sinagorinskyモデルに基づくLESによる結果との比較は、発表時に述べる予定である。

参考文献

[1] 猪股 渉, "安定化有限要素法による非圧縮性流れ解析": 第10回 数値流体力学シンポジウム 講演論文集, p.334-335: (1996)
[2] "第36回 生研講習会テキスト LES入門": 財団法人 生産技術研究奨励会, p.13-19: (1993)

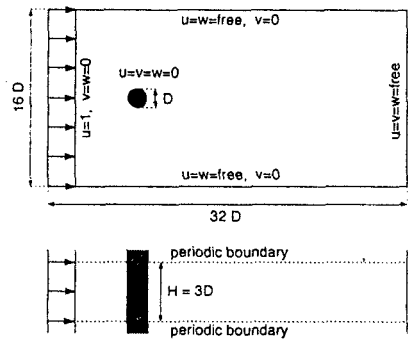


図1 解析領域図

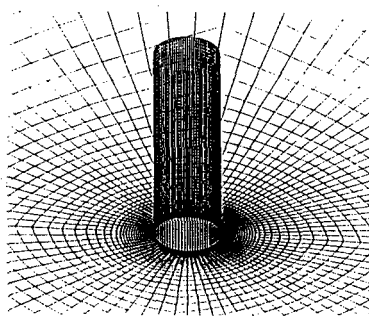


図2 3次元解析の有限要素分割図

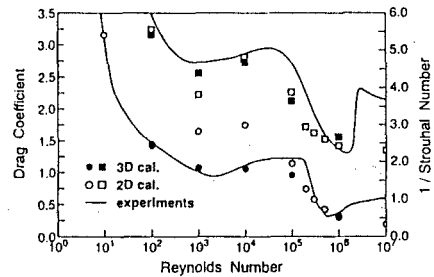


図3 抗力係数・ストローハル数の実験値との比較

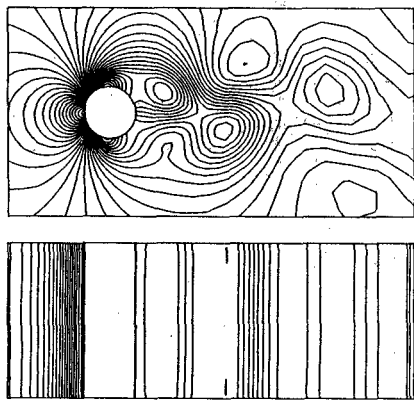


図4 圧力図 ($Re = 10^2$ 、断面 $z = 1, y = 0$)

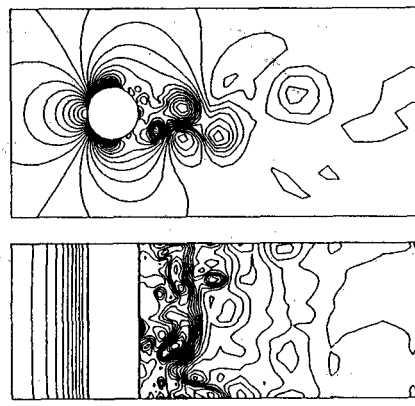


図5 圧力図 ($Re = 10^5$ 、断面 $z = 1, y = 0$)