

(I-52) 浅水長波流れ解析のための流線上流化有限要素法について

中央大学 学生員 ○菅野 諭
中央大学 正会員 樫山 和男

1. はじめに

これまで有限要素法による浅水長波流れ解析における安定化手法の一つとして、質量行列を集中化し、ランピングパラメーターを使用する方法 [1] が提案されている。しかし、この方法はパラメーターの設定次第で解が大きく変わってしまうとともに、そのパラメーターの決定が難しいという問題があった。

本論文は、ランピングパラメーターなどのパラメーターが介在せず、高精度かつ安定に計算する手法として、非圧縮粘性流体流れ解析でよく用いられている上流化手法の一つである SUPG 法 (Streamline-upwind/Petrov-Galerkin 法) を浅水長波方程式に適用し、その有効性を検討するものである。

2. 基礎方程式

本論文では、基礎方程式として以下に示す保存形の実線型、非定常の浅水長波方程式を用いる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = \mathbf{R} \quad (1)$$

ここに、 $\mathbf{U}$ 、 $\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{A}_i$ は以下に示される。

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} H \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ Hu \\ Hv \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ gH \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ gH \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - u^2 & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ c^2 - v^2 & 0 & 2v \end{bmatrix} \quad (4)$$

また、 u, v はそれぞれ x_1, x_2 方向の流速成分、 ζ は水位上昇量、 H は全水深 ($= h + \zeta$)、 g は重力加速度、 h は初期水位を表す。

3. SUPG 法

Galerkin 法では重み関数と形状関数は同一である。SUPG 法では上流側に重みを置いた重み関数を用いる。その重み関数を定義するために、式 (1) を次の移流方程式とみる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = R \quad (5)$$

この式での SUPG 法の重み関数から式 (1) と式 (5) を比較することにより、式 (1) の SUPG 法の重み関数を以下のように決定する。

$$\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{U}^* + \tau \mathbf{A}_j \mathbf{U}_j^* \quad (6)$$

また、 τ は時間の次元を持つ上流化パラメーターで以下を用いる。[2]

$$\tau = \left[\left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2\|u\|}{h} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (7)$$

ここで、 h は要素サイズを表す。

4. 有限要素方程式

4.1 空間方向の離散化と連立解法

空間方向の離散化手法に SUPG 法による有限要素法、要素は三角形一次要素を用いる。この SUPG 法の重み関数を用いて、式 (1) の弱形式を導くと以下となる。

$$\int_{\Omega} \hat{\mathbf{U}}^t \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} - \mathbf{R} \right) d\Omega = 0 \quad (8)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{U}^{*t} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} - \mathbf{R} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \tau \frac{\partial \mathbf{U}^{*t}}{\partial x_j} \left(\mathbf{A}_j \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} - \mathbf{A}_j \mathbf{R} \right) d\Omega = 0 \quad (9)$$

ここで、時間微分項に係るマトリックスを $\mathbf{M}_f$ とすると、

$$\mathbf{M}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_c & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_c & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{11} & \mathbf{C}^{12} & \mathbf{C}^{13} \\ \mathbf{C}^{21} & \mathbf{C}^{22} & \mathbf{C}^{23} \\ \mathbf{C}^{31} & \mathbf{C}^{32} & \mathbf{C}^{33} \end{bmatrix} \quad (10)$$

となる。ここで $\mathbf{M}_c$ は集中化しない質量行列、 $\mathbf{C}^{\alpha\beta}$ は SUPG 法により加わるマトリックスで次式 (11) となる。

$$\mathbf{C}^{\alpha\beta} = \mathbf{A}_j^{\alpha\beta} \int_{\Omega} \tau \frac{\partial \mathbf{U}^{*t}}{\partial x_j} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} d\Omega \quad (11)$$

このため運動方程式、連続式を独立して解くことができなくなり連立して解く必要性がでてくる。最終的に得られる有限要素方程式は以下になる。

$$\mathbf{M}_f \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{K}_i \mathbf{U}_{,i} = \mathbf{H} \mathbf{R} \quad (12)$$

ここで、 $\mathbf{K}_i$ 、 $\mathbf{H}$ にも SUPG 法による項が加わっている。

4.2 時間方向の離散化

θ 法により式 (12) を時間方向に離散化すると

$$\frac{M_f U_i^{n+1} - M_f U_i^n}{\Delta t} + \theta K_i U_i^{n+1} + (1-\theta) K_i U_i^n = HR \tag{13}$$

となる。ここで、 θ は

$$\theta = \begin{cases} 0 & : \text{陽的 Euler 法} \\ 1/2 & : \text{Crank-Nicolson 法} \\ 1 & : \text{陰的 Euler 法} \end{cases}$$

であり、 $\theta \geq 1/2$ の時に無条件安定となる。

本報告では、 $\theta = 0$ として解析を行っている。なお連立一次方程式を解く際には Element-by-Element SOR 法 (逐次的過剰緩和法) を用い、高速、省メモリー化を図っている。

5. 数値解析例

5.1 段波モデル

SUPG 法の有効性を示すために段波モデルを取り上げる。 x 方向 10m の水路を 50 分割した有限要素メッシュを用い初期波高を $\pm 1m$ とする。図 1 に 1 秒後の計算結果を示す。

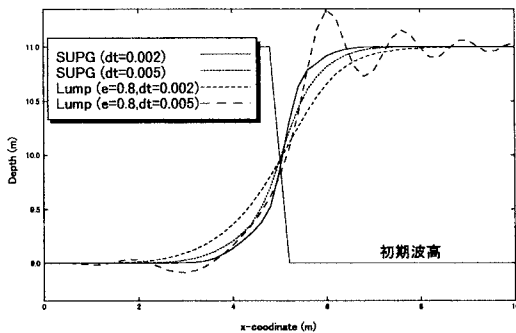


図-1 水深図 $t=1.0(s)$

図 1 より、質量行列を集中化する従来の方法では大きな水面振動が生じているのに対し SUPG 法を適用した場合は、この振動が生じず安定に計算されていることがわかる。また Δt の差異が解に及ぼす影響についても SUPG 法の方が小さいことがわかる。

表-1 CPU time の比較 (final time $t=5.0sec$)

	Δt	step	CPU time	CPU/step
E-by-E	0.005	1000	219sec	0.219sec
full matrix	0.005	1000	4560sec	4.560sec
lumping	0.005	1000	48sec	0.048sec

5.2 Shoaling of a solitary wave

次に浅水変形問題を取り上げる。初期条件として図 2 に示す孤立波を与え波が遡上する挙動を解析する。図 3 に 12.5 秒後、25 秒後の水位の計算結果を示す。

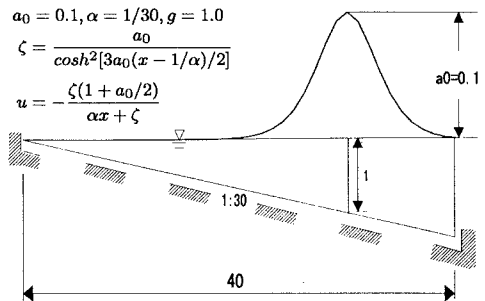


図-2 初期条件図

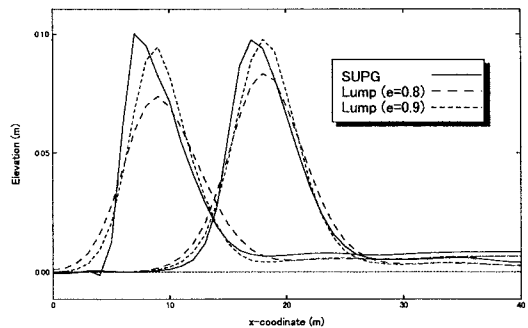


図-3 水位図 [$t=12.5, 25.0(s)$]

図 3 より質量行列を集中化する従来の手法では波高が減衰しているが、SUPG 法においては波高の減衰もなく浅水変形の挙動をよくとらえていることがわかる。

6. おわりに

本論文では、浅水長波方程式の安定化有限要素法として SUPG 法を用いる手法を検討しその有効性を確認した。それにより得られた結論は以下のようになる。

- 1) SUPG 法は、質量行列を集中化する従来の手法よりも安定であり、精度のよい解を得ることができた。
- 2) SUPG 法は、 Δt の解への依存性が小さいことが確認できた。
- 3) Element-by-Element 処理の導入により、省メモリー、高速化を図ることができた。(表 1 参照)

今後はこの手法の 2 次元性の顕著な問題での有効性を検討していく所存である。

参考文献

- [1] Kawahara, M., and Kashiwayama, K., "Selective lumping finite element method for the nearshore current", Int. J. Numer. Meth. Fluids, Vol. 4, pp. 71-97, 1984.
- [2] T. E. Tezduyar, S. Mittal, S. E. Ray and R. Shih, "Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order interpolation velocity-pressure elements", Comp. Meth. Appl. Mech. Engin., 95, pp. 221-242, 1992.
- [3] S. W. Bova and G. F. Carey, "A symmetric formulation and SUPG scheme for the shallow-water equations", Advances in Water Resources, Vol. 19, No. 3, pp. 123-131, 1996.
- [4] Katapodes, N. D., "Two dimensional surges and shocks in open channels", J. Hydraul. Engng, 110, pp. 794-812, 1984