（Ⅰ－51） Q1/P0要素を用いた有限要素法流れ解析の数値粘性について

中央大学　学生員　○田村　隆志
中央大学　学生員　猪股　渉
中央大学　正会員　樫山　和男

1. はじめに

本報告は、計算効率の優れた最低次の混合補間である Q1/P0 要素を用いた安定化有限要素法 (安定化行列+SUPG 法)[1] をベースとし、いくつかの時間積分法を取り上げ各手法の計算精度や計算時間について比較検討を行うものである。時間積分法として、準陽的解法、完全陰解法、Crank Nicolson 法、Tezduyar が提案した T6 formulation[2]、T6 formulation を簡略化し著者らが提案した T2 formulation を取り扱う。数値解析例として、孤立渦問題 (standing vortex problem) を取り上げる。

2. θ 法による時間方向離散化

Naveier-Stokes の運動方程式を、θ法により以下のように離散化する。

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t} + \theta u_j^n u_{i,j}^{n+1} + (1-\theta) u_j^n u_{i,j}^n \tag{1}$$
$$= -\theta (p_{,i}^{n+1} - \frac{1}{Re} u_{i,jj}^{n+1}) - (1-\theta)(p_{,i}^n - \frac{1}{Re} u_{i,jj}^n)$$

(1) 式と、$n+1$ 時間ステップにおける連続式

$$u_{i,i}^{n+1} = 0 \tag{2}$$

を時間進行の基礎式とする。ここで、θ は

$$\theta = \begin{cases} 0 & : \text{陽的 Euler 法} \\ 1/2 & : \text{Crank-Nicolson 法} \\ 1 & : \text{陰的 Euler 法} \end{cases}$$

となり、$\theta \geq 1/2$ の時に無条件安定となる。

3. T6 formulation

以下に Tezduyar により提案された T6 formulation を書き表す。

< 1st step >

$$\int_\Omega w_i \left\{ \frac{\tilde{u}_i^{n+\theta}-u_i^n}{\theta\Delta t} + u_j^n u_{i,j}^n \right\} d\Omega$$
$$+ \sum_{elm.} \int_{\Omega_e} \delta_i \left\{ \frac{\tilde{u}_i^{n+\theta}-u_i^n}{\theta\Delta t} + u_j^n u_{i,j}^n \right\} d\Omega_e = 0 \tag{3}$$

< 2nd step >

$$\int_\Omega w_i \left\{ \frac{u_i^{n+\theta}-\tilde{u}_i^{n+\theta}}{\theta\Delta t} + p_{,i}^{n+\theta} - \frac{1}{Re} u_{i,jj}^{n+\theta} \right\} d\Omega = 0 \tag{4}$$

$$\int_\Omega q u_{i,i}^{n+\theta} d\Omega = 0 \tag{5}$$

< 3rd step >

$$\int_\Omega w_i \left\{ \frac{\tilde{u}_i^{n+1-\theta}-u_i^{n+\theta}}{(1-2\theta)\Delta t} + p_{,i}^{n+\theta} - \frac{1}{Re} u_{i,jj}^{n+\theta} \right\} d\Omega = 0 \tag{6}$$

< 4th step >

$$\int_\Omega w_i \left\{ \frac{u_i^{n+1-\theta}-\tilde{u}_i^{n+1-\theta}}{(1-2\theta)\Delta t} + u_j^{n+1-\theta} u_{i,j}^{n+1-\theta} \right\} d\Omega \tag{7}$$
$$+ \sum_{elm.} \int_{\Omega_e} \delta_i \left\{ \frac{u_i^{n+1-\theta}-\tilde{u}_i^{n+1-\theta}}{(1-2\theta)\Delta t} + u_j^{n+1-\theta} u_{i,j}^{n+1-\theta} \right\} d\Omega_e = 0$$

< 5th step >

$$\int_\Omega w_i \left\{ \frac{\tilde{u}_i^{n+1}-u_i^{n+1-\theta}}{\theta\Delta t} + u_j^{n+1-\theta} u_{i,j}^{n+1-\theta} \right\} d\Omega \tag{8}$$
$$+ \sum_{elm.} \int_{\Omega_e} \delta_i \left\{ \frac{\tilde{u}_i^{n+1}-u_i^{n+1-\theta}}{\theta\Delta t} + u_j^{n+1-\theta} u_{i,j}^{n+1-\theta} \right\} d\Omega_e = 0$$

< 6th step >

$$\int_\Omega w_i \left\{ \frac{u_i^{n+1}-\tilde{u}_i^{n+1}}{\theta\Delta t} + p_{,i}^{n+1} - \frac{1}{Re} u_{i,jj}^{n+1} \right\} d\Omega = 0 \tag{9}$$

$$\int_\Omega q u_{i,i}^{n+1} d\Omega = 0 \tag{10}$$

ここで、w_i, q は Galerkin 法による重み関数、δ_i は SUPG 法による風上化の効果を加える重み関数である。また、時間積分パラメーターθは 1/3 としている [2]。

4. T2 formulation

T6 formulation は、6 段階のうち 2 つの段階で運動方程式と連続式を連立しているので多大な計算量を有する。そこで本報告では T6 formulation を簡略化することにより、解析精度は維持して計算効率の向上を可能とした T2 formulation の提案を行う。

< 1st step >

$$\int_\Omega w_i \left\{ \frac{\tilde{u}_i-u_i^n}{\Delta t} + u_j^n u_{i,j}^n - (1-\theta)\frac{1}{Re} u_{i,jj}^n \right\} d\Omega \tag{11}$$
$$+ \sum_{elm.} \int_{\Omega_e} \delta_i \left\{ \frac{\tilde{u}_i-u_i^n}{\Delta t} + u_j^n u_{i,j}^n - (1-\theta)\frac{1}{Re} u_{i,jj}^n \right\} d\Omega_e = 0$$

< 2nd step >

$$\int_\Omega w_i \left\{ \frac{u_i^{n+1}-\tilde{u}_i}{\Delta t} + p_{,i}^{n+1} - \theta\frac{1}{Re} u_{i,jj}^{n+1} \right\} d\Omega = 0 \tag{12}$$

$$\int_\Omega q u_{i,i}^{n+1} d\Omega = 0 \tag{13}$$

ここで、時間積分パラメーターθ は 1/2 としている。

5. 数値解析例

各時間積分法の解の精度を比較するため、数値解析例に孤立渦問題 (standing vortex problem) を取り上げる。

正方領域の 1 辺を 20 等分に要素分割し、その領域の中心に初期条件として流速 u_θ={ 5r for r<0.2, 2-5r for 0.2<r<0.4, 0 for r>0.4 } (図 1) の渦を強制的に発生させる。境界条件は 4 辺の壁面とも non-slip 条件である。レイノルズ数は 10^8 という粘性の影響が無に等しくなる値を与え、Δt は 0.025 として、無次元時間 5.0 まで計算した。なお、安定化行列のパラメータα[1] は 0.1 を用いた。

図 2〜5 は無次元時間 5.0 のときの、準陽的解法 (Modified Semi Explicit)、T6 formulation、完全陰解法 (Full implicit)、T6 formulation(Galerkin 法) の流速ベクトル図である。準陽的解法、T6 formulation は初期状態の渦を良く保っているのに対し、完全陰解法では渦の減衰が顕著であり、風上化を行わない Galerkin 法では解は発散している。図 7 は運動エネルギーの時刻歴を表している。陰的に離散化を行った手法のうち完全陰解法と Crank Nicolson 法は運動エネルギーが大きく減衰しているが T2 formulation と T6 formulation は準陽的解法に次ぐ精度で計算されている。表 1 は無次元時間 50.0 まで計算したときの各手法の計算時間の比較をしている。連立 1 次方程式を解くソルバーには Element-by-Element 処理をした共約勾配法を用いている。表より、準陽的解法が 1 ステップあたりの計算時間は最小であるが、完全陰解法や Crank Nicolson 法は微小時間増分量を大きくとることができ、総解析時間の短縮につながっている。

6. おわりに

本報告では、Q1P0 要素を用いた安定化有限要素法の時間方向の離散化に対して、いくつかの時間積分法を適用し、計算精度および計算時間の比較を行った。

本報告によって得られた結論は以下の通りである。

1) 孤立渦問題 (standing vortex problem) の解析結果より、最も精度良く解析されているのは準陽的解法であった。

2) 陰的解法のなかでは著者らの提案した T2 formulation が、完全陰解法等に比べて数値解の減衰は小さく抑えられ、かつ計算時間も他の陰的解法と比べて短いものとなり、有効な手法であるといえる。

今後は、高精度な陰解法の解析手法の構築について検討を行う予定である。

参考文献 [1] 猪股 渉, 樫山和男,"安定化有限要素法による非圧縮性流れ解析", 第 10 回数値流体シンポジウム講演論文集, pp334-335,1996 [2]T.E.Tezduyar, S.Mittal and R.shih, "Timeaccurate incompressible flow computations with quadrilateral velocity-pressure elements",Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 87,pp364-384,1991

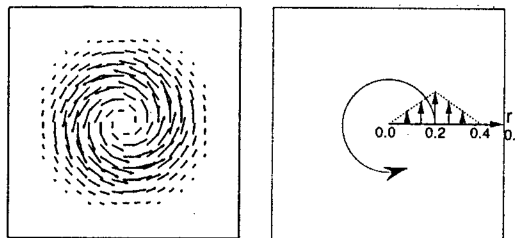

図 1 初期条件に与える渦

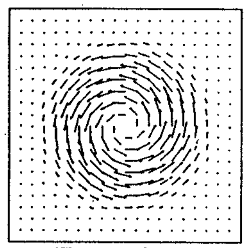
図 2 MSE

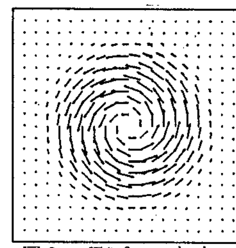
図 3 T6 formulation

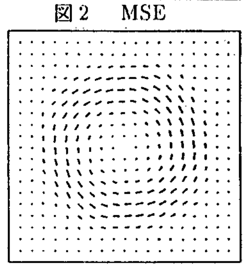
図 4 Full implicit

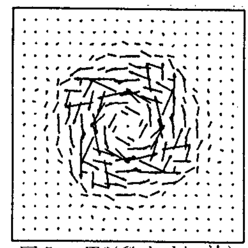
図 5 T6(Galerkin 法)

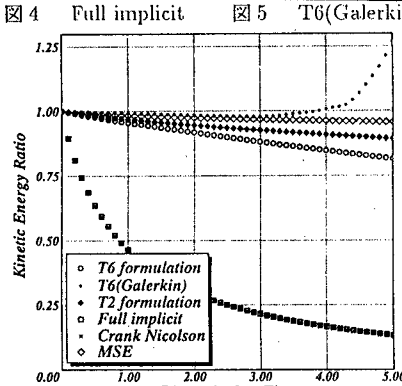

図 6 運動エネルギーの時刻歴

表 1 standing vortex problem における計算時間

scheme	Δt	step	cpu time	cpu/step
MSE	0.025	1000	107 sec	0.11 sec
T2 formulation	0.025	1000	1294 sec	1.29 sec
T6 formulation	0.025	1000	2443 sec	2.44 sec
Crank Nicolson	0.025	1000	3794 sec	3.79 sec
Full implicit	0.025	1000	3332 sec	3.33 sec
T6 formulation	0.1	250	770 sec	3.08 sec
Crank Nicolson	5.0	5	34 sec	6.80 sec
Full implicit	5.0	5	49 sec	9.80 sec