

Q1/P0 安定化有限要素法による 非圧縮粘性流れ解析における種々の計算条件に関する検討

中央大学 学生員 ○ 原田 太一
中央大学大学院 学生員 猪股 渉
中央大学 正会員 樫山 和男

1. はじめに

2次元円柱周り流れ解析において閉塞率を変化させることにより、抗力係数 C_D 及びストローハル数 St などの特性値が変動する現象は知られるところであるが、本研究はこの2次元円柱周り流れ解析における閉塞率効果に関する比較・検討を目的としたものである。対象とする閉塞率は2～25%の範囲において10通りを選択し、各閉塞率に対してそれぞれ $Re = 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ の5通りのレイノルズ数を用いて計算を行った。解法にあたっては流速双一次・圧力0次で補間したQ1/P0要素を用いた安定化有限要素法[1]を使用した。

2. 安定化有限要素法による離散化

非圧縮粘性流れの支配方程式であるナビエ・ストークス方程式を、陽的オイラー法により時間方向の離散化を行うと以下の(1)式が得られる。

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_j^n u_{i,j} = -p_{,i}^{n+1} + \frac{1}{Re} u_{i,jj} \quad (1)$$

この(1)式と、次式の $n+1$ 時間ステップにおける連続式を時間進行の基礎式とする。

$$u_{i,i}^{n+1} = 0 \quad (2)$$

ここで、 u_i 、 i 、 p はそれぞれ i 方向の速度成分、 i 方向の偏微分、圧力を表している。(1)式の空間方向の離散化にSUPG法を適用することにより、以下のような有限要素方程式が導かれる。

$$\frac{M_c u_i^{n+1} - M_c u_i^n}{\Delta t} + K(u_j^n) u_i^n = M_c M_L^{-1} C p^{n+1} - \frac{1}{Re} S u_i^n \quad (3)$$

ここで、 K 、 C 、 S は係数行列であり、特に M_c はコンシステントな質量行列、 M_L は集中化した質量行列である。(3)式を導出する際には、圧力の離散化に関して近似を施すGreshoらの方法を用いている。得られた(3)式と(2)式の連続式より連立一次方程式を導き圧力部を掃き出すと、以下の圧力のポアソン方程式が導かれる。

$$(C^T M_L^{-1} C + D) \Delta t p^{n+1} = -C^T M_c^{-1} b_i^n \quad (4)$$

ここで、 b_i^n は運動方程式の既知項をまとめたものであり、 D は圧力の不安定振動を回避する事を目的としたQ1/P0要素のための安定化行列[2]である。

3. 数値解析例

3.1 計算条件の概要

本研究の2次元円柱周り流れ解析で用いた解析モデルを図1示す。図の d 、 H はそれぞれ円柱の直径、流路幅であり、網目模様の部分は本研究で用いた全てのメッシュの核となる基本メッシュである。(mesh 1, 図2参照)

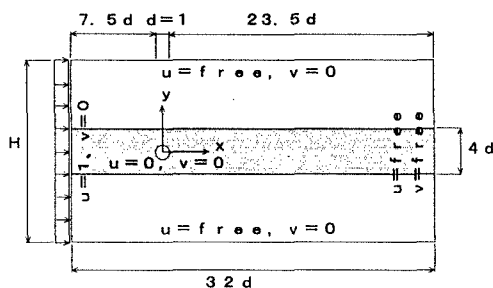


図1 解析モデル



図2 基本メッシュ (mesh 1)

基本メッシュの閉塞率 d/H は25%とし、表1に示す閉塞率25%以下のメッシュ(mesh 2～10)はこの基本メッシュの両側壁に同間隔のメッシュを閉塞率に合わせて付け加えて作成したものである。これによりメッシュの構造に影響を受けずに、閉塞率の異なるmesh 1～10の間で特性値の比較を行う事ができる。なお、最小メッシュ幅は全てのメッシュで0.005dである。

表1 全メッシュの閉塞率

メッシュ	閉塞率 (d/H)	節点数	要素数
mesh 1	25.0% (1/4)	4820	4672
mesh 2	16.7% (1/6)	5484	5328
mesh 3	12.5% (1/8)	6148	5984
mesh 4	10.0% (1/10)	6812	6640
mesh 5	8.33% (1/12)	7476	7296
mesh 6	6.25% (1/16)	8804	8608
mesh 7	5.00% (1/20)	10132	9920
mesh 8	3.33% (1/30)	13452	13200
mesh 9	2.50% (1/40)	16772	16480
mesh 10	2.00% (1/50)	20092	19760

3.2 計算結果と考察

2次元円柱周り流れ解析は表1で示した10通りのメッシュに対して $Re = 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ の5通りのレイノルズ数を用いて計算をそれぞれ無次元時間200まで行った。なお、閉塞率50.0% ($d/H = 1/2$), 33.3% ($d/H = 1/3$)についても同様に解析を試みたが、計算が途中で発散終了している。これは後流幅よりも流路幅Hが狭いことが原因であると言える。

図3, 図4はレイノルズ数 Re を横軸に、抗力係数 C_D 及びストローハル数の逆数 $1/St$ を縦軸に示したものである。図示した閉塞率 d/H は25.0%, 12.5%, 6.25%, 2.00%の4通りであるが、閉塞率の変化とともに解析値が実験値(Cantwell) [3] に近づいて行く事が分かる。 $Re = 10^3, 10^4$ で計算結果と実験結果が大きく異なっているが、これは流れの3次元性(計算は2次元)に起因している。また、 $Re = 10^6$ の時の結果に変化がほとんど見られないのは、後流の幅が縮小する事によるものである。

図5, 図6は閉塞率 d/H を横軸に、抗力係数 C_D 及びストローハル数の逆数 $1/St$ を縦軸に示したものである。これにより閉塞率6.25%以下では、 C_D 値、 $1/St$ 数のどちらにおいてもほぼ収束している事が分かる。

4. おわりに

本研究は2次元円柱周り流れ解析における閉塞率効果について検討を行ったものであるが、得られた計算結果より、閉塞率6.25%の特性値とこれ以下の閉塞率の特性値との間に大きな差は見られず、ほぼ収束している事が明らかになった。この結果から、2次元円柱周り流れ解析の際の閉塞率は6.25%程度を確保すれば十分であると結論付けてよいであろう。

今後の研究としては解析モデルの流入及び流出口から円柱までの距離を変化させた場合での特性値の差違についても検討を行うとともに、最終的には3次元計算で同様の解析を行い、2次元計算の解析結果と比較・検討する予定である。

[参考文献] [1] 猪股 渉, 桧山 和男: "安定化有限要素法による非圧縮性流れ解析" 第10回数値流体力学シンポジウム論文集 1996. pp-334-335 [2] 水上 昭: "Q1-P0要素によるFEM流れ解析のための安定化行列" 第8回数値流体力学シンポジウム論文集 1994. pp-647-650 [3] Cantwell, B. and Coles, D. "An Experimental Study of Entrainment and Transport in the Turbulent Near Wake of a Circular Cylinder" J. fluid Mech. 136, 1983

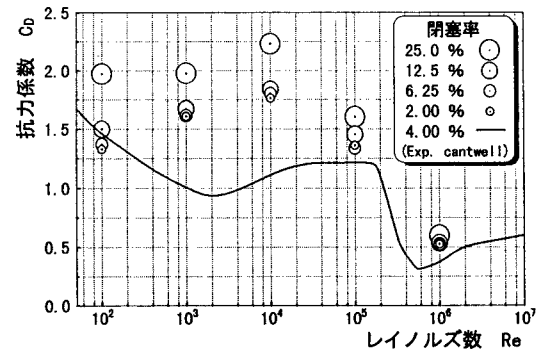


図3 各閉塞率ごとの C_D 値

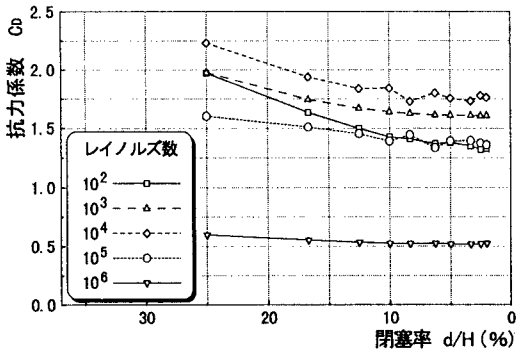


図5 各レイノルズ数ごとの C_D 値

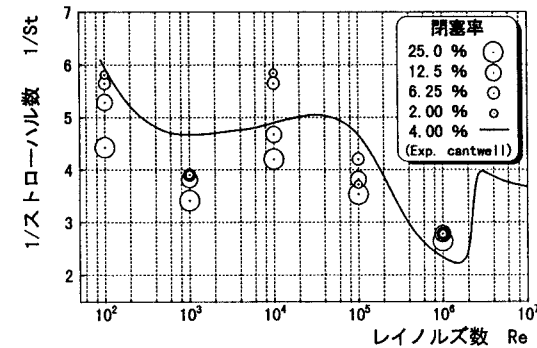


図4 各閉塞率ごとの $1/St$ 数

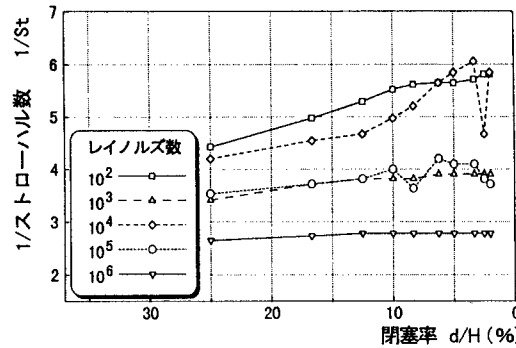


図6 各レイノルズ数ごとの $1/St$ 数