

(I-35) ねじり試験による大ひずみ塑性理論の検証

足利工業大学 正 黒田 充紀

1. まえがき

固体の変形解析においては、解の信頼性に対して、構成方程式が決定的な影響をもつ。土木工学の分野では、金属に関してはほとんどの場合、ミーゼスの降伏条件に基づいた（移動硬化を導入している場合を含む）構成方程式が用いられてきた。ミーゼス型の理論は微小ひずみ下では多くの場合十分な予測性を発揮するが、破壊に至る直前の大ひずみ状態を視野に入れると、たとえ Jaumann rate 等で客観性を導入したとしても不十分であるといえる。また、これまでに各種の概念による大ひずみ理論が提案されているが、ほとんどの場合、単調載荷に対してのみ有効性が論じられてきた。

本研究では、反転載荷を含む荷重パターンにも対応可能な、異方性の発達を含むモデルを示し、その有効性を中空試験片のねじり試験結果との対比で示す。また、移動硬化理論および速度型変形理論の大ひずみ領域における不合理性を指摘する。

2. 異方性を含む大ひずみ構成式

微小弾性ひずみ・有限塑性ひずみを考え、変形速度テンソル $\mathbf{D}$ （現在状態における速度の空間勾配 $\mathbf{L}$ の対称部分）とスピンテンソル $\mathbf{W}$ （ $\mathbf{L}$ の反対称部分）の加算分解 $\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p$ および $\mathbf{W} = \mathbf{w} + \mathbf{W}^p$ を考える。上付き e と p は弾性と塑性部分を意味する。 $\mathbf{w}$ は材料の下部構造のスピンと定義される¹⁾。速度型弾性の構成式を次のように仮定する。

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \mathbf{D}^e = \mathbf{C} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p); \quad \mathbf{C} = 4 \text{ 階の弾性テンソル (ここでは等方性とする)} \quad (1)$$

ここに、 $\boldsymbol{\sigma}$ は Cauchy の真応力、 $(\overset{\nabla}{})$ はスピン $\mathbf{w}$ によって定義される客観速度を表す。関連流動則を仮定すると、塑性変形速度は次のように表される。

$$\mathbf{D}^p = \dot{\phi} \mathbf{N}^p; \quad \mathbf{N}^p = \partial J / \partial \boldsymbol{\sigma} \quad (2a,b)$$

ここに、 $\dot{\phi}$ は超過応力関数で本研究では $\dot{\phi} = \dot{\epsilon}_0 (J/g(\epsilon^p))^{1/m}$ というべき乗則を仮定する。 $\dot{\epsilon}_0$ と m は材料定数、 $g(\epsilon^p)$ はひずみ硬化関数、 ϵ^p は相当塑性ひずみ、 J はダイナミック降伏関数で応力の次元を持つ。ここでは J に Hill 型の直交異方関数を考える。

$$J(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{n}_i, \epsilon^p) = \sqrt{\frac{3}{2(A_1 + A_2 + A_3)}} \left[A_1(\hat{\sigma}_{22} - \hat{\sigma}_{33})^2 + A_2(\hat{\sigma}_{33} - \hat{\sigma}_{11})^2 + A_3(\hat{\sigma}_{11} - \hat{\sigma}_{22})^2 + 2A_4\hat{\sigma}_{12}^2 + 2A_5\hat{\sigma}_{23}^2 + 2A_6\hat{\sigma}_{13}^2 \right]^{1/2}; \quad \hat{\sigma}_{ij} = \mathbf{n}_i \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_j \quad (3a,b)$$

ここに、 $\mathbf{n}_i$ は直交異方軸の基底ベクトル、 $A_1 \sim A_6$ は直交異方係数。 $\mathbf{n}_i$ の発展式は、 $\dot{\mathbf{n}}_i = \mathbf{w} \mathbf{n}_i$ で与えられる。塑性スピンの関係式は次式で与える²⁾。

$$\mathbf{W}^p = \beta(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{D}^p - \mathbf{D}^p \boldsymbol{\sigma}) = \dot{\phi} \beta(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{N}^p - \mathbf{N}^p \boldsymbol{\sigma}); \quad \beta = a/J \quad (4a,b)$$

ここに、 a は塑性スピン係数で、ここでは定数と仮定した。著者提案なる式(4)と異方性を考慮した流れ則(式(2,3))とを結合して構成式を誘導する点が、従来理論に比べて本理論の新しい点である。

3. 理論の妥当性の検討

ここでは、解析対象として大ひずみねじりを考える。軸方向変形を解放した場合には次のような自由せん断問題に置き換えることができる(図1)。

$L_{11} \neq 0, L_{22} \neq 0, L_{12} = \text{const.}, L_{21} = 0; \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} \neq 0, \sigma_{ij} = 0 \text{ for all other } i, j \quad (5)$
 L_{33} は A_1 の値によって零または非零となるが、塑性圧縮性およびダイラタンシーの何れも考慮しないので $L_{kk} = 0$ である。 $A_1 = A_2 = A_3, A_4/A_1 = 3.6$, 初期直交異方角 θ_0 (空間固定 $x_1 - x_2$ 系と直交異方 $\hat{x}_1 - \hat{x}_2$ 系とのなす角 θ の初期値。反時計回りが正。) $= 45^\circ$ とした場合の軸方向伸びとせん断ひずみ γ との関係を図2に示す。 $\gamma = 1.0$ でせん断方向を逆転させた。また、塑性スピン係数 a に対していくつかの値を仮定した。初期ねじりで伸びた材料は、反転後に一旦縮んで再度伸びている。図3は繰り返し

載荷の解析例である。これらの解析結果は、Swift³⁾が最初に報告した実験結果とよく整合している。著者も独自にねじり試験機を製作²⁾し、同様の実験を行い、実験事実の再現性を確認している。これらの解析結果は本構成式の現象予測性の有利さを端的に示していると思われる。

4. しばしば用いられる他の理論について

従来から、Swift³⁾が報告した「ねじると伸びる」という現象は、潜在的なあるいは発達する異方性の帰結と考えられていた。この現象を再現する試みは、移動硬化理論、変形理論（コーナー理論）などを用いてもなされてきた。図4はこれら2つの理論を用いて前節と同様な反転自由せん断問題を解析した結果である。初期ねじりのステージを見る限り、確かに伸びが再現されており矛盾を感じないが、実験で見られる反転直後の縮み現象が全く捉えられていない。詳細は省略するが、大ひずみ域ではパウシンガー効果は全く見られないことが最近指摘されている。この事実と図4の結果から、大ひずみ域での移動硬化則の使用は大きな矛盾が含まれていることになり、注意が必要である。また、変形理論やその派生であるコーナー理論もせん断帯分岐解析に有利であるとして重宝されてきたが、反転載荷や繰り返し載荷に対して現実的な解を与える保証は、図4からわかるように、全くないといえる。

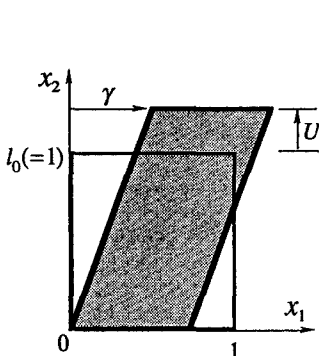


図1 自由せん断問題

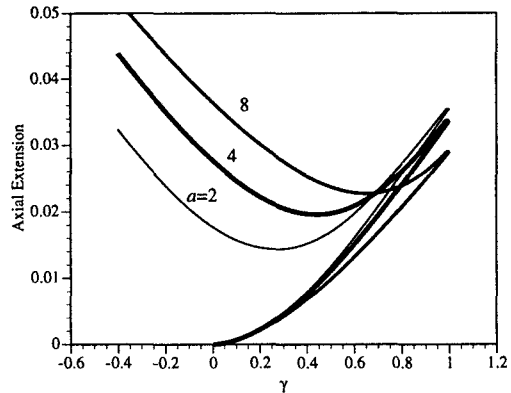


図2 反転自由せん断問題（塑性スピン係数 a を変化させた場合）

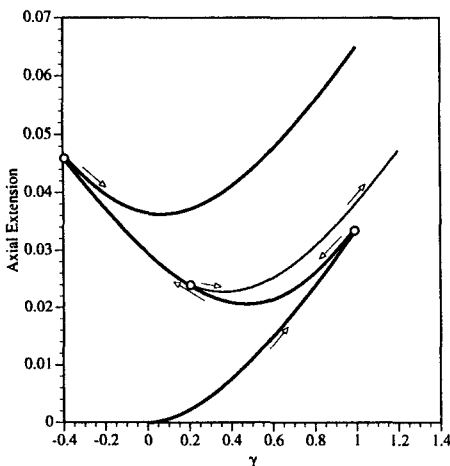


図3 繰り返し自由せん断問題（塑性スピン係数 $a=4$ ）

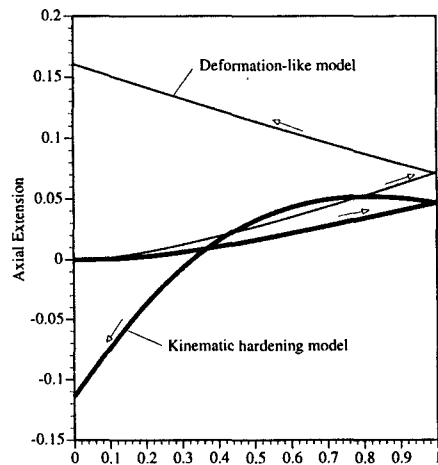


図4 反転自由せん断問題；移動硬化理論と変形理論を用いた場合；何れの場合も塑性スピン係数 $a=4$ 。

参考文献

- 1) Dafalias, Y.F., The Plastic Spin, *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 52, p. 865, 1985.
- 2) Kuroda, M., Roles of Plastic Spin in Shear Banding, *Int. J. Plasticity*, Vol. 12, p. 671, 1996.
- 3) Swift, H.W., Length Changes in Metals under Torsional Overstrain, *Engineering*, Vol. 163, p. 253, 1947.