

(I - 12) せん断剛性を考慮したケーブルの振動応力

関東学院大学 フェロー 倉西 茂
 関東学院大学大学院 ○学生員 高野 覚

1. はじめに

近年、ケーブル構造物が数多く建設されているがケーブル部材は風等により振動が起き易く、ケーブル両端は固定されているので端部では曲げ応力が大きくなることが解っている。本研究の目的は、ケーブル素線間のせん断剛性が端部における曲げ応力にどのように影響を与えているかを求めるために、振動に関するパラメーターを無次元化し、端部に生じる曲率を示す図を提示する。

2. 解析方法

直線ケーブルの振動方程式は、張力が作用したはりの振動方程式を用いることができる。一般にはりの問題は平面保持、直線保持の Bernoulli-Euler の仮定を用いせん断変形の影響を無視してきたが、ここでは断面が変形後も平面を保持するが、軸線に対する直角は保持されない Timoshenko 梁による曲げの支配方程式を扱い曲げ応力を求める。

2. 1 振動方程式

ケーブル素線間のせん断変形を考慮したはりの曲げ問題の支配方程式は⁽¹⁾

$$EI \left(\frac{\partial^4 y}{\partial \chi^4} + \frac{1}{GkA} \frac{\partial^2 p_z}{\partial \chi^2} \right) = p_z$$

で与えられる。この場合外力は $p_z = -m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 y}{\partial \chi^2}$ で表されるので

$$EI \left(1 + \frac{T}{GkA} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial \chi^4} - T \frac{\partial^2 y}{\partial \chi^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{mEI}{GkA} \frac{\partial^4 y}{\partial \chi^2 \partial t^2} = 0 \quad \dots\dots (2. 1)$$

を得る。この微分方程式の一般解は、

$$f(\chi) = C_1 \cosh \alpha \chi + C_2 \sinh \alpha \chi + C_3 \cos \beta \chi + C_4 \sin \beta \chi \quad \dots\dots (2. 2)$$

で表される。両端固定はりの座屈荷重 $T_E = \frac{4\pi^2 EI}{\ell^2}$ を置き、弦の円振動数 $\omega_r = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{T}{m}}$ を用いて

$\bar{t} = \frac{T}{T_E}$, $\bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_r}$, $\bar{s} = \frac{T_E}{GkA}$ なる無次元パラメーターを導入して α , β を書き表すと、

$$\alpha \ell = \pi \sqrt{\frac{\bar{t}(4 - \bar{s} \cdot \bar{\omega}^2)}{4(1 + \bar{t} \cdot \bar{s})}} \sqrt{2 + 2 \sqrt{1 + \frac{16(1 + \bar{t} \cdot \bar{s}) \bar{\omega}^2}{\bar{t} \cdot (4 - \bar{s} \cdot \bar{\omega}^2)^2}}} \quad , \quad \beta \ell = \pi \sqrt{\frac{\bar{t}(4 - \bar{s} \cdot \bar{\omega}^2)}{4(1 + \bar{t} \cdot \bar{s})}} \sqrt{-2 + 2 \sqrt{1 + \frac{16(1 + \bar{t} \cdot \bar{s}) \bar{\omega}^2}{\bar{t} \cdot (4 - \bar{s} \cdot \bar{\omega}^2)^2}}}$$

となる。。ここで、 $G \rightarrow \infty$ にした値すなわち $\bar{s} \rightarrow 0$ が、せん断変形の影響を考えない時の値になる。(2.

2) 式にせん断変形を考慮した両端固定はりの境界条件より、振動数方程式は次式で表される。

$$2\alpha \ell \cdot \beta \ell \left(\frac{1}{\cosh \alpha \ell} - \cos \beta \ell \right) (1 + \alpha \bar{\ell}) (1 - \beta \bar{\ell}) + \left[(\alpha \ell)^2 (1 + \alpha \bar{\ell})^2 - (\beta \ell)^2 (1 - \beta \bar{\ell})^2 \right] \tanh \alpha \ell \sin \beta \ell = 0 \quad \dots\dots (2. 3)$$

ここで

$$\alpha \bar{\ell} = \bar{t} \cdot \bar{s} \left\{ \left(\frac{\alpha \ell}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{\bar{t}} + \frac{\bar{s} \cdot \bar{\omega}^2}{4} + \left(\frac{\alpha \ell}{2\pi} \right)^2 \bar{s} \right\} \quad , \quad \beta \bar{\ell} = \bar{t} \cdot \bar{s} \left\{ \left(\frac{\beta \ell}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{\bar{t}} - \frac{\bar{s} \cdot \bar{\omega}^2}{4} + \left(\frac{\beta \ell}{2\pi} \right)^2 \bar{s} \right\}$$

3. 固有振動数と曲率、曲げ応力

(2. 2) 式の係数を定め、(2. 3) 式より固有振動数を求めると図-1を得る。 $\chi = \frac{\ell}{2}$ のときの振幅を δ

し $\frac{\delta}{\ell} = r$ と置く。 $\chi = 0$ での曲率を求めると次式を得る。

$$\ell f''(\chi) = r \frac{\ell^2 (\alpha^2 + \beta^2)}{\cosh \frac{\alpha \ell}{2} + \bar{C}_2 \sinh \frac{\alpha \ell}{2} - \cos \frac{\beta \ell}{2} + \bar{C}_4 \sin \frac{\beta \ell}{2}} \quad \dots\dots (3. 1)$$

(3. 1) 式を図示すると図-2となる。

図-1 張力と固有振動数の関係

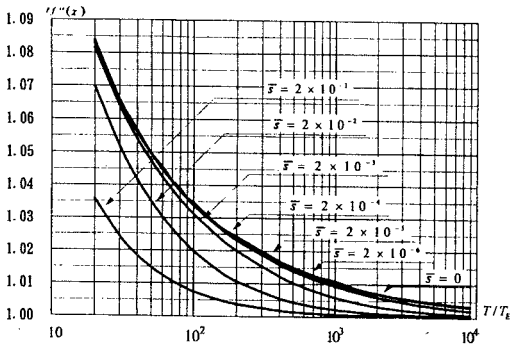
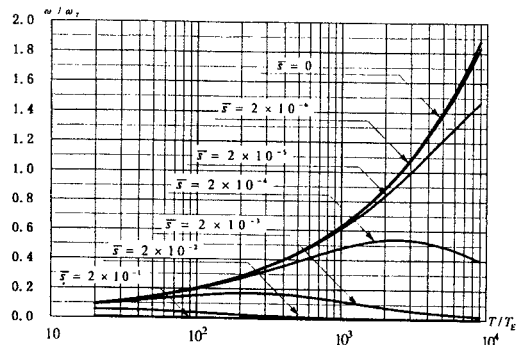


図-2 張力と曲率の関係



4. 実橋例

実際に橋梁に用いられるケーブルの諸量は、 $E = 200 \text{ GN/m}^2$ 、 $G = 80 \text{ GN/m}^2$ で $\sigma = 1.0 \text{ GN/m}^2$ とする。ここで1本の素線から斜張橋、吊橋の3タイプのケーブル構造物を取り上げたのが表-1になる。

表-1 各ケーブルにおける曲率

種類	断面半径 (m)	ケーブル長(m)	T / T_E	$T_E / GkA \text{ (}\mu\text{)}$	$\ell f''(\chi)$
素線	0.0025	50	5000	10	20μ
斜張橋	0.04	200	3000	5	1.5
斜張橋	0.06	400	5000	3	1.5
吊橋	0.5	500	100	400	0.2

5. まとめ

せん断変形の影響を考慮した Timoshenko 梁の時は、影響を無視していた Bernoulli-Euler 梁の時より、固有振動数、曲率ともに小さくなることが解った。せん断剛性については、これから研究する内容である。

参考文献

- (1) 西野文男・長谷川彰夫：土木学会編 新体系土木工学 7 構造物の弾性解析、P.84. 85、技報堂出版