

○中央大学 学生員 玄順 貴史
中央大学 学生員 北野 祐介
中央大学 正員 川原 睦人

1 はじめに

我々は基礎を築くため、トンネルを施工するために地盤を掘削する。しかしながら、掘削の際に生じる地盤の変形に伴う近接構造物への影響は避けて通れない問題である。そこでこれらの事前解析は施工時の安全性にとって必要なことである。このような実験は現在まで数多くなされてきた。しかし実際の施工には多くの未知パラメーターを含む。また、一般に知られている物性値と現場で得られる物性値は、そのほとんどで異なる。このため、このような実験はいまだ推測の域を越えないのが現状である。そこで本研究では、地盤の力学的挙動から地盤の未知パラメーターの同定を行った。変形を予測する手段として有限要素法を用い、実際に観測された変位から物性値を求める逆解析を行った。同定の手法としては、共役勾配法を用いた。そして実際の現場で得られたデータを用いて地盤の変形と地盤の弾性係数の同定を行い、検討した。

2 基礎方程式

2.1 仮定

基礎方程式を導くにあたり、微小変形であると仮定する。

2.2 基礎方程式

弾性体の解析を行なうためには、

(1) 運動学的方程式 (歪み-変位方程式)

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{in } V \quad (1)$$

(2) 運動量保存の法則 (応力の釣合方程式)

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (2)$$

(3) 構成方程式 (応力-歪み方程式)

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad \text{in } V \quad (3)$$

の3方程式と境界条件式が必要である。

$$E_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (4)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (5)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (6)$$

式(1),(2),(3)より

$$\int_V E_{ijkl}\epsilon_{k,l}\epsilon_{i,j}dV = \int_S P_i u_i ds \quad (7)$$

ここで u_i は変位、 ϵ_{ij} は歪み、 σ_{ij} は応力、 E_{ijkl} は弾性係数

3 境界条件

境界 S_1 で変位が与えられ、境界 S_2 で表面力 $\hat{P}_i$ が与えられたとする。すると境界条件は次のようになる。

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{on } S_1 \quad (8)$$

$$P_i = \sigma_{ij}n_j = \hat{P}_i \quad \text{on } S_2 \quad (9)$$

4 有限要素方程式

式(7)を重みつき残差方程式に変形し、三角形一次の内挿関数を仮定し、ガレルキン法を適用して、有限要素方程式を導くと以下ようになる。

$$K_{\alpha i \beta k} u_{\beta k} = \Omega_{\alpha i} \quad (10)$$

各係数行列は、以下に示す形となる。

$$K_{\alpha i \beta k} = \int_V (\Phi_{\alpha,j} E_{ijkl} \Phi_{\beta,l}) dV \quad (11)$$

$$\Omega_{\alpha i} = \int_{S_2} (\Phi_{\alpha} \hat{P}_i) dS \quad (12)$$

$$\sigma_{i,j} = E_{ijkl} \Phi_{\beta,l} u_{\beta k} \quad (13)$$

5 はりの重ね合わせ

はりとはり弾性体を重ね合わせるうえで、はり弾性地盤上の骨組みと見なした。ここで弾性体とはりの剛性マトリックスの大きさが違うので $M=0$ として、はりの剛性マトリックスの θ の項を消去した。従って、はり弾性体との交点において弾性体の全体剛性マトリックスにそれぞれはりの剛性マトリックスを加えることで剛性を上げることができ弾性体にはりを重ね合わせたモデルについての全体剛性マトリックスを作成することができた。

6 パラメーター同定

6.1 評価関数

同定問題は出力の差を用いた最小化問題であり、この手法は間接手法と言われている。共役勾配法は一種の最小二乗法で今回の解析に用いた。評価関数は、変位の計算値と観測値の残差の二乗の合計によって表される。

$$J = \frac{1}{2} \int_V (\{u\} - \{u^*\})^T (\{u\} - \{u^*\}) \quad (14)$$

ここで u と u^* はそれぞれ変位の計算値と観測値である。

6.2 共役勾配法

共役勾配法は計算時間が長くなることがあるが、アルゴリズムが簡明であると言う利点がある。そこで今回は共役勾配法を用いた。評価関数 J を最小にするパラメーター E は繰り返し計算によって求められる。未知パラメーターを求めるための評価関数の勾配は次の式で求めることができる。

$$\{d\} = -\left[\frac{\partial J}{\partial e}\right] = -\left[\frac{\partial u}{\partial e}\right](\{u\} - \{u^*\}) \quad (15)$$

ここで $\left[\frac{\partial u}{\partial e}\right]$ は感度行列であり、式 (10) をパラメーター E で偏微分することにより求められる。 J の関数はスカラー量 α で最小になる。この状態はステップ幅 α によって導かれる。評価関数 J をテラー展開することで次の式が得られる。

$$\begin{aligned} J(\{E\}^{(i)} + \alpha^{(i)}\{d\}^{(i)}) &= J + \alpha\left[\frac{\partial J}{\partial E}\right]^T\{d\} \\ &= \frac{1}{2}\int_V (\{u\} + \alpha\left[\frac{\partial u}{\partial E}\right]\{d\} - \{u^*\})^T \\ &\quad (\{u\} + \alpha\left[\frac{\partial u}{\partial E}\right]\{d\} - \{u^*\}) \quad (16) \end{aligned}$$

式 (16) を最小にするステップ幅 α は、 J を α で偏微分したその式から求めることができる。

$$\alpha = -\frac{\{d\}^T\left[\frac{\partial J}{\partial E}\right]}{\{d\}^T\left[\frac{\partial u}{\partial E}\right]^T\left[\frac{\partial u}{\partial E}\right]\{d\}} \quad (17)$$

式 (16)、(17) の手順をふんで E の同定ができる。パラメーターはそれぞれ式 (15)、(17) を用いて $\{d\}$ と α を求め更新する。新しいパラメーター $E^{(i+1)}$ は次のように表される。

$$\{E\}^{(i+1)} = \{E\}^{(i)} + \alpha^{(i)}\{d\}^{(i)} \quad (18)$$

ここで (i) は繰り返し番号である。勾配は共役勾配法を用いて計算され、勾配は次の式で更新される。

$$\beta = \frac{\left(\left[\frac{\partial J}{\partial e}\right]^{(i+1)}, \left[\frac{\partial J}{\partial e}\right]^{(i+1)}\right)}{\left(\left[\frac{\partial J}{\partial e}\right]^{(i)}, \left[\frac{\partial J}{\partial e}\right]^{(i)}\right)} \quad (19)$$

$$\{d\}^{(i+1)} = -\left[\frac{\partial J}{\partial e}\right]^{(i+1)} + \beta\{d\}^{(i)} \quad (20)$$

式 (21) によって計算された勾配は次の段階に用いられる。

7 数値解析例

今回の研究は図 1 のようなモデルで行い、物性値をすべての要素で一定としたリングは 32 角形よりなる骨組みで考え、弾性地盤上のはりとして解析を行った。曲げ剛性は理論値および 5t、10t の時の実験値を採用した。図 3 は実験で得られた荷重 - 変位量曲線である。下表に解析に用いた荷重時の変位及び得られた結果を示す。

	ポアソン比 ν	荷重 P	観測値 u	曲げ剛性 EI	弾性係数 E
1	0.30	5.0[t]	0.80[mm]	102.9[t-m ²]	6848[t/m ²]
2	0.30	5.0[t]	0.80[mm]	120[t-m ²]	6568[t/m ²]
3	0.30	10.0[t]	1.78[mm]	77.2[t-m ²]	6411[t/m ²]
4	0.30	10.0[t]	1.78[mm]	120[t-m ²]	5703[t/m ²]
5	0.30	13.9[t]	3.00[mm]	120[t-m ²]	4405[t/m ²]
6	0.30	15.0[t]	3.37[mm]	120[t-m ²]	4173[t/m ²]

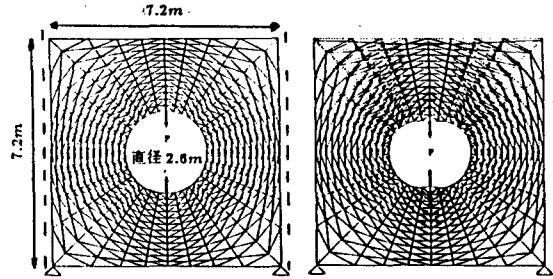


図-1 地盤の解析モデル

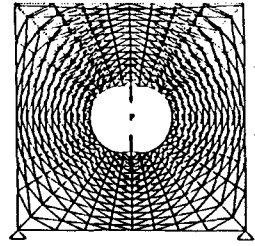


図-2 地盤の変形

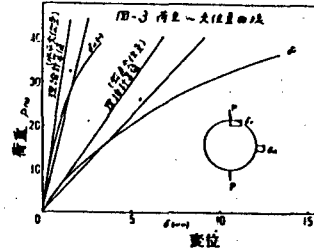
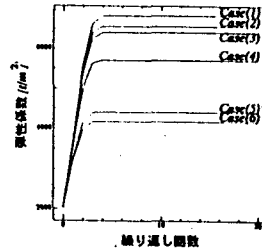
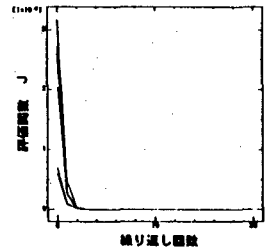


図-4



繰り返し回数

図-5



繰り返し回数

8 おわりに

本研究では地盤の変形及び未知パラメーターの同定を行った。弾性体にはりを重ねることで実際の現象についての活用性を得ようとした。今回は小口径シールドトンネルの載荷実験で得られたデータを基に弾性係数を未知のものとして同定を行った。ただし、シールドに力を加えた際に弾性体を与える影響は広範囲に及ばないためシールドの周りの地盤を一層と見なして解析を行った。結果として、弾性体とはりとの交点において、ただはりを重ね合わせた全体剛性マトリックスを用いたために求めた弾性係数は 4000-7000t/m² とケースによってばらつきが見られた。本来ならば各ケースで弾性係数が一致しなければならないのだが、この要因としては弾性体の自重を無視していることが考えられる。また、引張の力が加わったときの弾性体への配慮がなされていないことが考えられる。以上から、今後の課題としては、より実際の現象の解析が可能となるように先に述べたことを考慮していきたい。またこれからこのような同定問題は、構造物の施工時に得られたデータを基に今後の施工の対策を立てる基として必要となってくるだろう。従って、今後掘削に伴う地盤の挙動から地盤の弾性係数を同定するという方向で研究を進めていきたいと思ひます。

参考文献

- [1] 川原 聡人、新体系土木工学・有限要素法、技報堂出版
- [2] 嘉納 秀明、システムの最適理論と最適化、コロナ社