

(II-110) 有限要素法による $k-\varepsilon$ モデルを用いた乱流解析

○中央大学 学生員 佐々木 範也
中央大学 正員 川原 睦人

1 はじめに

耐風設計の際、対象地域における風環境を予測することは、きわめて重要なことである。従来は、風洞試験によりこの予測が行われてきたが、近年のめざましいコンピュータの発達にともない、数値解析の面からも流れ現象を予測することが行われている。また流体現象のほとんどは乱流である。しかし、現代の数値流体力学手法をもってしても、乱流はまだ解明困難な流れであることも事実である。本研究では、速度場の解析で用いられる最も一般的な2方程式乱流モデルを解説する。2方程式乱流モデルのうち壁面上まで適用する低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデルについては、Jones-Lannder[1] 以来さまざま提案されてきている。しかし、高レイノルズ数の流れに対しては数値計算的に不安定であるため計算できないという問題もある。また、従来のモデルから得られる解は、直接数値計算 (DNS) データの平均速度 $\bar{U}$ と乱流エネルギー k を真値として与えることにより得られるものであるため、 $k-\varepsilon$ モデルの構築においては、 k -方程式中における圧力拡散項に対するモデル化も必要とされる。

本研究では、圧力拡散項を含む k -方程式に対するモデル化を行なうと同時に、モデル関数、モデル定数 (渦粘性係数中の減衰関数 f_μ 、 σ_k 、 σ_ε 、付加生成項 E) の改良によって低レイノルズ数の流れだけでなく高レイノルズ数の流れに対しても適用できるモデルの構築を試みる。

2 基礎方程式

十分発達した平行平板間2次元流れに対する運動方程式と連続式は次式のように与えられる。

$$\frac{D\bar{U}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \bar{u_i u_j} \right) \quad (1)$$

$$\bar{U}_{i,i} = 0 \quad (2)$$

ここで $D/Dt = \partial/\partial t + \bar{U}_j \partial/\partial x_j$ は実質微分項を表し、 $\bar{U}$ 、 $\bar{P}$ はそれぞれ時間平均速度と圧力を表す。

$k-\varepsilon$ モデルでは、一般的に式 (1) 中のレイノルズ応力 $\bar{u_i u_j}$ は、渦粘性係数 ν_t により次式で与えられる。

$$-\bar{u_i u_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad (3)$$

また、 ε の代わりに $\tilde{\varepsilon}$ を用いると、境界条件を壁面で零と置くことができ数値計算の安定性が向上するため本研究では $\tilde{\varepsilon}$ 方程式を解く。

$k-\tilde{\varepsilon}$ モデルの基礎式は次式で表される。

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right\} + P_k - \varepsilon + \pi_k^* \quad (4)$$

$$\frac{D\tilde{\varepsilon}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} \right\} + \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} (C_{e1} P_k - C_{e2} \tilde{\varepsilon}) - \frac{\tilde{\varepsilon} \tilde{\varepsilon}}{k} + E \quad (5)$$

ここで

$$P_k = -\bar{u_i u_j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}, \quad \pi_k^* = -\frac{1}{2} \nu \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_j^2}$$

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \hat{\varepsilon}, \quad \hat{\varepsilon} = 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j} \right)^2$$

$$E = -2\nu \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{y^2} \right) \exp(-0.5Rt y^+) \quad , Rt = \frac{k^2}{\nu \tilde{\varepsilon}}$$

$$C_{e1} = 1.4 \quad , C_{e2} = 1.92$$

又、 P_k は乱流エネルギーの生成項、 ε は散逸率、 π_k^* は壁近傍のみに作用する圧力拡散項を表す。式 (5) 中の右辺第4項は壁近傍での $\tilde{\varepsilon}$ の挙動を正しく表すために河村ら [2] によって導入された項である。 E は付加生成項で、 ε の代わりに $\tilde{\varepsilon}$ を用いるモデルでは、壁近傍の予測性能を上げるために設ける。

渦粘性係数 ν_t は次式で与えられる。

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\tilde{\varepsilon}} \quad (6)$$

ここで $C_\mu = 0.09$ 。

減衰関数 f_μ は次式で与えられる。

$$f_\mu = 1 - f_{w1} f_{w2} \quad (7)$$

ここで f_{w1} 、 f_{w2} は次のように表される。

$$f_{w1} = \exp\left(-\frac{y_\xi}{285}\right) \quad , f_{w2} = \exp\left\{-\left(\frac{y_\xi}{15}\right)^3\right\}$$

$$\frac{1}{y_\xi^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{(60y_L)^2}$$

$$y_k = y \left(\frac{\varepsilon}{\nu^3} \right)^{0.25} \quad , y_L = y \left(\frac{\varepsilon}{k^{1.5}} \right)$$

f_{w1} は減衰関数 f_μ の壁近傍における漸近挙動を満足し、 f_{w2} は遷移領域から対数領域にかけて支配的になる関数である。また y_ξ は河村らが導入した動粘性係数 ν に依らない無次元距離を仮定している。

一般的に、 σ_k 、 σ_ε はそれぞれ 1.0、1.3 近傍の値である。しかし、直接数値計算 (DNS) の結果を解析すると壁近傍では σ_k 、 σ_ε 共にそれぞれの値よりもかなり小さいことがわかる。そこで、本研究での σ_k と σ_ε は次のように与えられる。

$$\sigma_k = 1.0 - 0.7 \exp\left\{-\left(\frac{y_\xi}{8}\right)^2\right\} \quad (8)$$

$$\sigma_\varepsilon = 1.3 - 0.7 \exp\left\{-\left(\frac{y_\xi}{8}\right)^2\right\} \quad (9)$$

3 分離型法による離散化（流速修正法）

運動方程式と連続式に分離型解法の一つである流速修正法を適用する。まず、式(1),(2)を時間方向に離散化すると

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_j^n u_{i,j}^n + \frac{1}{\rho} p_{,i}^n - \nu_e (u_{i,j}^n + u_{j,i}^n)_{,j} = 0 \quad (10)$$

$$u_{i,i}^{n+1} = 0 \quad (11)$$

$$\nu_e = \nu + \nu_t$$

となる。ここに、 Δt は微小時間、 n は時間ステップである。

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_j^n u_{i,j}^n + \frac{1}{\rho} p_{,i}^n \\ - \frac{1}{2} \{ \nu_e (u_{i,j}^n + u_{j,i}^n)_{,j} + \nu_e (\tilde{u}_{i,j}^{n+1} + \tilde{u}_{j,i}^{n+1})_{,j} \} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{\tilde{u}_i - \tilde{u}_i^{n+1}}{\Delta t} - \frac{1}{\rho} p_{,i}^n = 0 \quad (13)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - \tilde{u}_i}{\Delta t} + \frac{1}{\rho} p_{,i}^{n+1} = 0 \quad (14)$$

式(14)の発散をとり、式(11)の非圧縮条件を課すと、圧力ポアソン方程式(15)が得られる。

$$p_{,ii}^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \tilde{u}_{i,i} \quad (15)$$

以上により、分離型法の考えに基づき、流速場と圧力場を分離することができる。

又、式(12)(13)(14)(15)に重み付き残差法を適用し、ガラクキン法の手順で定式化を行い、有限要素方程式を得る。時間方向の離散化には、BTD(Balancing Tensor Diffusivity)法を用いた陰的なクランクニコルソン法を粘性項に対し適用した。

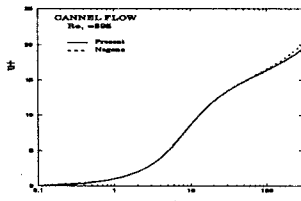


Fig. 1 Mean velocity profiles

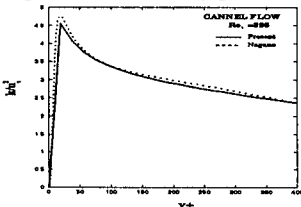


Fig. 2 Turbulent energy profiles

4 結果

本モデルを平行平板間乱流に適用し、長野ら[3]によるデータとともにFig1.2.3に示す。また、境界条件は壁面($y=0$)で $U=k=\varepsilon=0$ とした。平均流速、乱流エネルギーについては全体的に長野らのデータとよく一致しているが ε については全体的な挙動の一致は見られるが、本研究の目的の一つである ε の挙動の改善（壁面上で最大値をとる）を正確に再現していない。

また、従来の $k-\varepsilon$ モデルでは難しかった高レイノルズ数の流れに対しても計算が可能になった。Fig.4に示すように $Re=10^6$ の平均流速は、対数法則を満たしている。

5 おわりに

本モデルでは、従来の $k-\varepsilon$ モデルでは難しかった高レイノルズ数流れに対しても適用することができた。しかしながら、本モデルの結果と長野らのデータとの比較には違いがみられるため（特に壁面近傍における ε ）、さらにモデルを改良していく必要がある。また、今後は剥離や再付着を伴う流れ場に対しても適用できるモデルを試みる。

参考文献

- [1] Jones, W.P. and Launder, B.E., "The prediction of laminarization with a two equation model of turbulence", Int.J.Heat Mass Transf.,12(1972),301.
- [2] Kawashima, N. and Kawamura, H., "A $k-\varepsilon$ Two Equation Model of Near Wall Turbulence." 第7回数値流体力学シンポジウム議論集,(1993),315
- [3] Nagano, Y. and Hattori, H., "境界層流れ", 熱と流れのシミュレーション, pp.11-25
- [4] Nagano, Y. and Tagawa, M., "An Improved $k-\varepsilon$ Model for Boundary Layer Flows." Trans. ASME, J. Fluids Eng.,112(1990),pp.33-39
- [5] Chien, K.-Y., "Predictions of Channel and Boundary-Layer Flows with a Low-Reynolds-Number Turbulence Model," AIAA Journal, Vol.20, Jan. 1982, pp. 33-38.

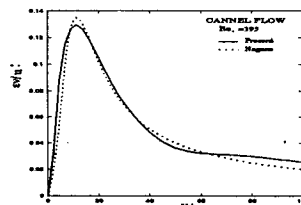


Fig. 3 ε profiles

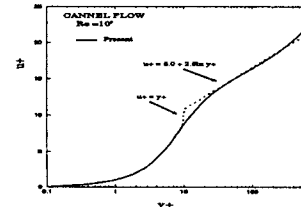


Fig. 4 Mean velocity profiles($Re=10^6$)