(II－108)　　下水管鉛直縦シャフト管内の流れの理論解析

東洋大学工学部環境建設学科　正員　荻原　国宏

図－１のように回転方向と鉛直方向が主流となっている流れを考える。r 方向の流れは無視するとして外力として重力 g、圧力 p、内部摩擦力、壁面摩擦力、空気との間の摩擦力 τ を考える。

水脈内の流速は一様であると考える。運動方程式は

$$\frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_\theta}{\partial z}-\frac{1}{\rho}\frac{\tau_{w\theta}+\tau_{a\theta}}{t}$$

$$\frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}+w\frac{\partial w}{\partial z}=g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_z}{\partial z}-\frac{1}{\rho}\frac{\tau_{wz}+\tau_{az}}{t} \qquad (1)$$

となり、連続の式は

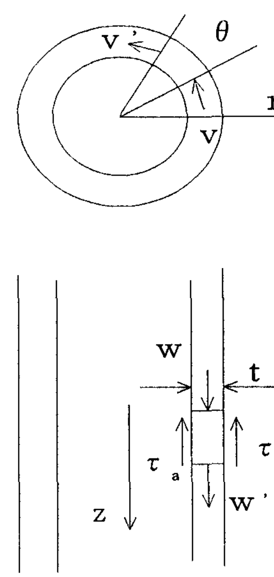
$$\frac{\partial(wt)}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial(vt)}{\partial\theta}=0$$

(2)

である。ここで断面内での速度の θ 方向の変化は無視できると考え、さらに内部摩擦力は壁面と空気面との摩擦力に比べて無視できるとする。運動方程式は

$$w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}-\frac{1}{\rho}\frac{\tau_{w\theta}+\tau_{a\theta}}{t}$$

$$w\frac{\partial w}{\partial z}=g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{1}{\rho}\frac{\tau_{wz}+\tau_{az}}{t} \qquad (3)$$



図－1

となり、連続の式は　$\frac{\partial(wt)}{\partial z}=0,\quad wt=q$　　(4)

となる。また壁面と空気面での摩擦力はそれぞれ次の様に表す。

$$\tau_{w\theta}=f_w\frac{\rho v^2}{2},\tau_{a\theta}=f_a\frac{\rho v^2}{2},\tau_{wz}=f_w\frac{\rho w^2}{2},\tau_{aw\theta}=f_a\frac{\rho w^2}{2} \qquad (5)$$

さらに圧力 p は断面内では空気の圧力と同じであると仮定し、空気が定常的に流れている事を考慮すると

$$\frac{\partial p}{\partial\theta}=0,\quad \frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g I \qquad (6)$$

と書ける。ここに I は圧力勾配である。空気の場合には重力の分は無視出来るとする。

これらの関係式を使って運動方程式を書き直すと

$$w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\tau_{w\theta}+\tau_{a\theta}}{t}$$

$$w\frac{\partial w}{\partial z}=g(1+I)-\frac{1}{\rho}\frac{\tau_{wz}+\tau_{az}}{t} \qquad (7)$$

第１式をまず解いていこう。この式に連続の式と壁面摩擦力の式を代入すると

$$\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{v^2}{2}\frac{f_w+f_a}{q} \qquad (8)$$

が得られる。これは積分し z=0 で速度 v_0 として積分常数を決めると速度を与える式として次の式が求められ

る。

$$v = \frac{v_0}{1 + \left(f_w + f_a\right)\frac{v_0 z}{2q}} \tag{9}$$

次に運動方程式の第２式を書き直すと

$$\frac{w\,dw}{g(1+I) - \frac{w^3}{2}\frac{f_w + f_a}{q}} = dz \tag{10}$$

となる。ここで a,b を$a = g(1+I)$, $b = \frac{f_w + f_a}{2q}$と置き書き直すと$\frac{w\,dw}{a - bw^3} = dz$の形になる。

微分式の左辺を部分分数分解して積分すると

$$z + C = \frac{1}{6a'b}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\frac{w}{a'} + 1\right) + \ln\frac{\left(a'^2 + a'w + w^2\right)}{\left(w - a'\right)^2}\right] \tag{11}$$

が得られる。ここで

$$Y\left(\frac{w}{a'}\right) = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{w}{a'} + \frac{1}{2}\right) + \ln\frac{\left(1 + \frac{w}{a'} + \left(\frac{w}{a'}\right)^2\right)}{\left(\frac{w}{a'} - 1\right)^2}\right] \tag{12}$$

と置き, z=0, $w=w_0$ の条件で積分常数を決めると解が求められる。

$$z = \frac{1}{6a'b}\left[Y\left(\frac{w}{a'}\right) - Y\left(\frac{w_0}{a'}\right)\right] \tag{13}$$

ここで係数の整理をしておく。

$$a'b = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}b = \sqrt[3]{ab^2} = \sqrt[3]{\frac{g(1+I)(f_w + f_a)^2}{4q^2}} \tag{14}$$

また速度が一定になる条件は(10)式から

$$w_e = \sqrt[3]{\frac{2g(1+I)q}{f_w + f_a}} \tag{15}$$

となる。この関係を使うと(14)式は

$$a'b = w_e\frac{f_w + f_a}{2q} \tag{16}$$

となる。次に空気の流速と流量についてまとめて置こう。摩擦力と圧力勾配の関係から

$$\tau_a = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p_a}{\partial z}\right)(r - t) = \frac{1}{2}\rho g I(r - t) \tag{17}$$

と摩擦力の定義の式から、空気の速度が求められ, さらに空気の輸送量が求められる。

$$w_a = \sqrt{\frac{\rho g I(r - t)}{\rho_a f_a}} \tag{18}$$

$$Q_a = \frac{\pi(r - t)^2}{4}w_a = \frac{\pi(r - t)^2}{4}\sqrt{\frac{\rho g I(r - t)}{\rho_a f_a}} \tag{19}$$