(Ⅱ －34) 分岐理論を用いた富栄養化の発生に関する安定性解析

建設・環境研究所 学生員 ○ 松本 純一
建設・環境研究所 正 員 井元 利則
中央大学理工学部 正 員 川原 睦人

1 緒言

近年、湖沼において本来長い歴史の中で生ずる現象が、自然要因の上に人為活動が加算されて、著しく富栄養化速度が加速され、短時間の内に湖沼が富栄養化する現象が起こり、その水域での利水上の障害が問題とされている。

現在、この問題における水質予測の解析においては富栄養化が発生する前と発生した後について連続した現象と考え発生前、発生後ともに基礎方程式を普通に計算するという手法が用いられている。しかし、筆者らは、この問題に対して富栄養化が発生する前と発生した後の現象においては不連続な現象（構造力学における部材の座屈前と座屈後のようなもの）であると考えるものである。

そこで本研究では、この富栄養化現象に関する水質予測に対して、その現象が発生する（不安定）か、発生しない（安定）かを分岐理論を用いて有限要素法により解析するという手法を提案するものである。そのために、まず海の藻類を用いた分岐理論とその安定性（リアプノフの安定性）について示し、海の藻類における Britton の解析値 [1] と、有限要素法を用いた解析値についてその解の検証を行い、次に実際に富栄養化現象が問題となっている霞ヶ浦においてこの解法を適応するものである。

2 基礎方程式

海の藻類の反応と拡散における基礎方程式は次に示す式 (1) によって表記することができる。

$$\dot{u} = \lambda\ f(u,v) + D_1\nabla^2 u\ ,\ \dot{v} = \lambda\ g(u,v) + D_2\nabla^2 v \quad (1)$$

式 (1) 中の $f(u,v), g(u,v)$ は以下のようなものである。

$$\begin{aligned} f(u,v) &= J_1 - u - \rho\ h(u,v) \\ g(u,v) &= \alpha(J_2 - v) - \rho\ h(u,v) \\ h(u,v) &= u\ v/(1+u+K\ u^2) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、u，v は藻類の密度、植物プランクトンを示し、式 (2) 中の D_1，D_2，J_1，J_2，α，ρ，K は定数であり、λ は変数（分岐のパラメータ）である。

3 分岐理論

式 (1) における不安定な平衡解、すなわち、ある生物が異常発生したときにおける解は、実際にはこの方程式によって求めることができないことから、式 (1) における解の存在や安定性を考えることが重要となる。ここで、式 (1) の平衡解は次に示す分岐理論を用いることによって得ることができる。平衡解の近くでの拡散方程式における線形安定性は $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0$ とおくことによって調べられる。すなわち、安定性は平衡解のところでの線形作用素 L（ヤコビ行列）の安定性と関係づけられる。したがって、リヤプノフの安定性により L の実数部最大の固有値 σ が純虚数（しかも半単純）であるならば、安定で周期的な解が存在する。

$$L\ \phi = \sigma\phi\ ,\ \sigma: \text{固有値}\ ,\ \phi: \text{固有ベクトル}$$

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} \dot{u}_{,u} & \dot{u}_{,v} \\ \dot{v}_{,u} & \dot{v}_{,v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1\nabla^2 + \lambda\ f_{,u} & \lambda\ f_{,v} \\ \lambda\ g_{,u} & D_2\nabla^2 + \lambda\ g_{,v} \end{bmatrix}$$

4 海の藻類を用いた解析値の検証

4.1 有限要素法による解法

$L(\lambda)$ における固有値問題をスペクトル問題と考え、以下に示す $-\nabla$ と k^2 の関係が成り立つものとする。

$$-\nabla^2\ \mathbf{u} = k^2\ \mathbf{u} \quad (3)$$

式 (3) においてすべての境界がディリクレ境界であると考え、空間方向の離散化として通常のガラーキン法による、三角形要素を用いたヘルムホルツ方程式 (3) の有限要素方程式 (4) は以下のような一般固有値問題として扱うことができる。[2]

$$H_{\alpha^i\beta^i}\ \mathbf{u}_\beta = k^2\ M_{\alpha\beta}\ \mathbf{u}_\beta \quad (4)$$

ここで、$H_{\alpha^i\beta^i}, M_{\alpha\beta}$ は係数マトリックスをしめしており以下のようなものである。

$$H_{\alpha^i\beta^i} = \int_\Omega (\Phi_{\alpha,i}\Phi_{\beta,i})\ d\Omega\ ,\ M_{\alpha\beta} = \int_\Omega (\Phi_\alpha\Phi_\beta)\ d\Omega$$

4.2 解析結果

内部が空洞である円柱状の解析領域を用いた海の藻類における Britton の解析値と有限要素法による解析値を図 1 に示す。図 1 をみると Britton の解析値と有限要素法による解析値は同様な分布を示していることが解る。

5 霞ヶ浦における解析例

5.1 解析値の最適化

式 (4) によって求められる $\mathbf{u}$ は、不安定平衡解になったときのモードである。したがって、式 (4) によって求め

られた u を式 (5) のように重ね合せることによって不安定平衡解になったときの解 $\hat{\mathbf{u}}$ を表現することができる。

$$\hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{nx} \mathbf{u}_i a_i \ , \ a_i : \text{定数} \ , \ nx : \text{総接点数} \qquad (5)$$

そこで、霞ヶ浦の植物プランクトンが異常発生したときの観測値を u の重ね合せによって表現するために次に示すような最適化問題を考える。

$$\text{状態ベクトル} \ : \ \tilde{\mathbf{u}} \ (\text{観測値})$$

$$\text{制御ベクトル} \ : \ a_i \left(\hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i a_i \ , \ n \leq nx \right)$$

$$\text{評価関数} \ : \ J = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\hat{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}})^2 \ d\Omega$$

ここで、J を最小にするような制御ベクトル a_i を求める。

5.2 解析結果

霞ヶ浦における解析結果を図2に示す。図2をみると、霞ヶ浦における植物プランクトン異常発生時の観測値と、本研究で提案した解法による解析値は非常によく似た分布を示していることが解る。

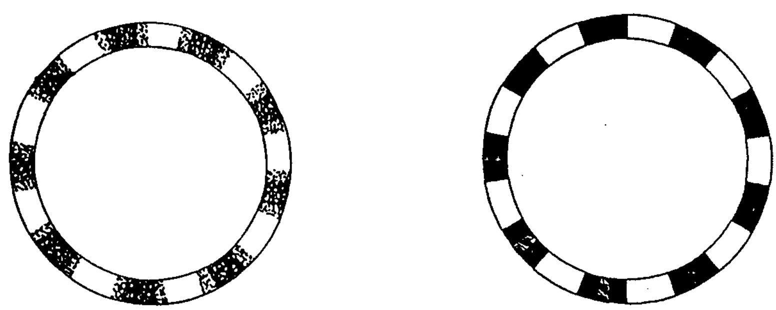
6 結言

富栄養化現象に関する水質予測として、分岐理論を用いた安定性解析を提案し、この解法を用いることにより異常発生時の植物プランクトンの分布が非常によく解析できることを示した。

参考文献

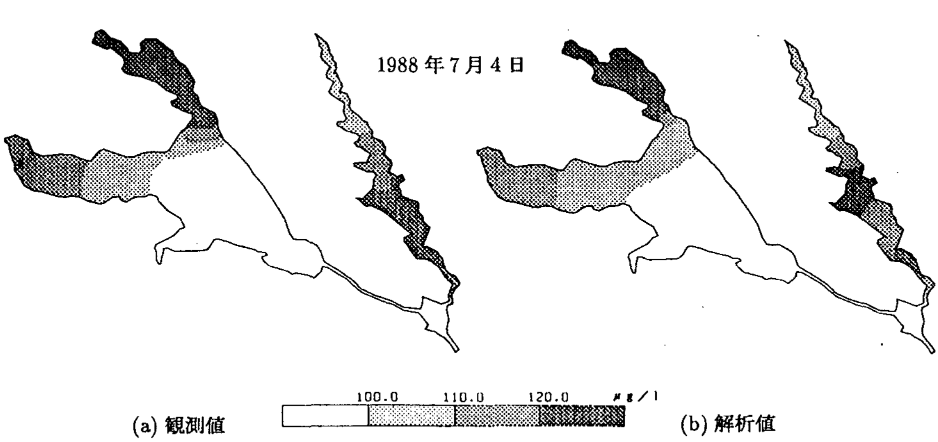
[1] Britton, N.F.(1986), Reaction-diffusion equations and their application to biology, Academic Press, London, 109-137.

[2] T. Imoto and M. Kawahara(1995), BIFURCATION ANALYSIS OF TUBULARIA IN A FINITE TWO-DIMENSIONAL DOMAIN WITH FINITE ELEMENT METHOD, *Finite Elements in Fluids*, Vol. 9, 67-76.



(a) Britton の解析値　　(b) 有限要素法による解析値

図1　海の藻類の増殖パターンにおける分布の比較



(a) 観測値　　(b) 解析値

図2　霞ヶ浦における植物プランクトン異常発生時の分布の比較