(Ⅱ－7)　物質拡散における開境界処理について

○中央大学　学生員　粕川　健
中央大学　正員　川原　睦人

1　序論

有限要素法により数値解析する際、発生する問題の一つとして境界の問題がある。この問題を解決する手段として、人為的に設けた開境界上で、内部領域の数値解析解と外部領域の一般解を接続する解析解接続法がある。そのような開境界処理法を用いて、解析した例である。

2　基礎方程式

基礎方程式として、浅水長波方程式と移流拡散方程式を用いる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+g\eta_{,i}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+hu_{i,i}=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t}+u_i c_{,i}-\kappa c_{,ii}=0 \tag{3}$$

ここで、$u_i(i=1,2)$はx、y方向の流速、ηは水位変動量、hは水深、gは重力加速度、cは濃度、κは拡散係数である。

3　境界条件と初期条件

流速を座標変換して境界に対して直角方向の流速u_nを

$$u_n=ul+vm=\hat{u_n} \qquad on \quad S_1 \tag{4}$$

l,mは境界S_1の方向余弦である。また水位が規定されなければならない。すなわち

$$\eta=\hat{\eta} \qquad on \quad S_2 \tag{5}$$

濃度は次のように規定される。

$$c=\hat{c} \qquad on \quad S_3 \tag{6}$$

開境界上では、次のような連続条件式が成り立つ。

$$c=\bar{c} \qquad on \quad S_4 \tag{7}$$

ここで$\bar{c}$は外部領域の一般解である。濃度フラックスを規定する場合は次のようになる。

$$b=\kappa c_{,i}n_i=\hat{b} \qquad on \quad S_5 \tag{8}$$

そして初期条件は次のようになる。

$$u_i=\hat{u_{i0}}\ ,\ \eta=\hat{\eta_0}\ ,\ c=\hat{c_0} \quad at \quad t=0 \tag{9}$$

4　有限要素方程式

(1)-(3)を重み付き残差方程式に変形し、三角形要素による一次多項式で補間し、ガレルキン法を適用すると次のような有限要素方程式を導くことができる。

$$M_{\alpha\beta}\dot{u_{\beta i}}+gH_{\alpha\beta i}\eta_\beta=0 \tag{10}$$

$$M_{\alpha\beta}\dot{\eta_\beta}+gH_{\alpha\beta i}u_{\beta i}=0 \tag{11}$$

$$M_{\alpha\beta}\dot{c_\beta}+(B_{\alpha\beta}+S_{\alpha\beta})c_\beta=\hat{\Omega_\alpha} \tag{12}$$

また時間方向の離散化に対しては陽的オイラー法を用いている。

5　外部領域の一般解

移流拡散方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial c}{\partial t}+u\frac{\partial c}{\partial x}+v\frac{\partial c}{\partial y}-\kappa\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\right)=0 \tag{13}$$

ここで拡散方程式に変換するために、次のような式を適用する。

$$\nu(x,y,t)=c(x,y,t)exp\left(\frac{u^2+v^2}{4\kappa}t-\frac{u}{2\kappa}x-\frac{v}{2\kappa}y\right) \tag{14}$$

この方程式を移流拡散方程式に代入することにより、拡散方程式が得られる。

$$\frac{\partial \nu}{\partial t}-\kappa\left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2}\right)=0 \tag{15}$$

これを変数分離すると次のようになる。

$$\nu(x,y,t)=X(x)Y(y)T(t) \tag{16}$$

式(16)を(15)に適用すると、次のような3式を得ることができる。

$$X_{,xx} - \frac{\lambda}{\kappa}X = 0 \qquad (17)$$

$$Y_{,yy} - \frac{\mu}{\kappa}Y = 0 \qquad (18)$$

$$T_{,t} - (\lambda + \mu)T = 0 \qquad (19)$$

まず式 (19) を解くと

$$T = C_1 exp[(\lambda + \mu)t] \qquad (20)$$

ここで $\lambda+\mu<0$ であると仮定し、λ=-$\kappa(\mathrm{n}\pi)^2, (n = 1, 2, ...)$、$\mu$=-$\kappa(\mathrm{m}\pi)^2, (m = 1, 2, ...)$と置く。
これより式 (17),(18) を解くと次のようになる。

$$X = C_2 sinn\pi x \qquad (21)$$

$$Y = C_3 sinm\pi y \qquad (22)$$

また式 (20) は

$$T = C_1 exp[-\kappa(n^2 + m^2)\pi^2 t] \qquad (23)$$

よってこれら 3 式を重ね合わせ式 (14) を適用する。ここで開境界における連続条件式は一本であることから、n=m=n という仮定をすると次のようになる。

$$\begin{aligned}\bar{c} &= A \sin n\pi x \sin n\pi y exp[-(2kn^2\pi^2 + \frac{u^2+v^2}{4\kappa})t \\ &\quad + \frac{u}{2\kappa}x + \frac{v}{2\kappa}y]\end{aligned} \qquad (24)$$

一方開境界における濃度の離散値は次のようになる。

$$c = \Phi_\alpha c_\alpha \quad (\alpha = 1, 2) \qquad (25)$$

開境界における連続条件式は、次のようになる。

$$\int_{S_4} c^*(c - \bar{c})dS = 0 \qquad (26)$$

これらの式から未定定数 A は、次式のようになる。

$$A = \frac{\int_{S_4} \Phi_\alpha c_\alpha dS}{C} \qquad (27)$$

C= $\int_{S_4} sinn\pi x \sin n\pi y exp[-(2\kappa n^2\pi^2 + \frac{u^2+v^2}{4\kappa})t + \frac{u}{2\kappa}x + \frac{v}{2\kappa}y]dS$

6 数値解析例

角柱周りに濃度 c=1.0 を与えつづける。Fig.1 は有限要素メッシュであり、Fig.2,3,4,5 は拡散現象において開境界処理をした場合としない場合の比較である。Fig.6,7,8,9 は移流拡散現象であり一様な方向に流速 u=0.3[m/s] を与えた場合の比較である。

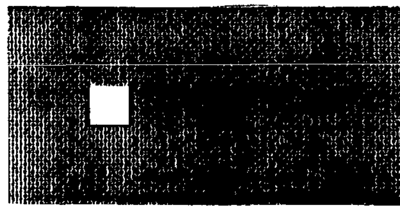

Fig.1

開境界処理をした場合　　開境界処理をしない場合(濃度フラックス＝0)

[20 秒後]

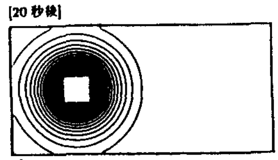

Fig.2

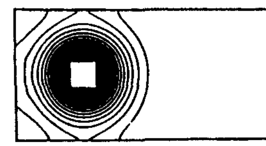

Fig.4

[40 秒後]

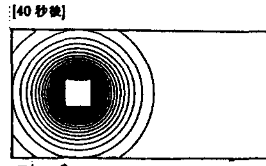

Fig.3

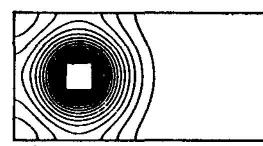

Fig.5

[20 秒後]

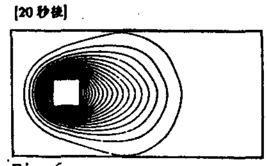

Fig.6

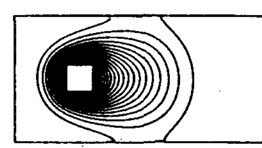

Fig.8

[40 秒後]

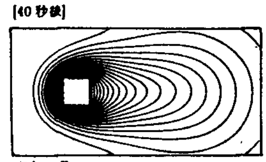

Fig.7

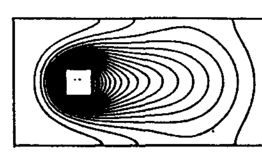

Fig.9

7 結論

数値解析結果より、開境界処理の効果がうまくあらわれているように思える。しかし、外部領域の一般解の未定定数を決定するにあたり、開境界上における連続条件式が一本であることからひとつだけしか決定することしかできないという欠点がある。この問題は今後の課題といえる。

参考文献

[1] M.kawahara and H.Yoshida "Finite Element Method of New System for Civil Engneering", Gihoudou Publishing, 1983.

[2] M.Kawahara "Fluid Analysis by Finite Element Method",1985.