

中央大学 学生員 ○前田晃一
中央大学大学院 学生員 吉田和人
中央大学 正会員 桒山和男

1. はじめに

本研究は Smagorinsky の渦粘性モデルを用いた LES (Large Eddy Simulation) により、乱流場に置かれた円柱周りの流れ解析を行い、要素分割の違いによる特性値への影響を検討したものである。また、境界条件に対する検討として円柱表面に damping function を適用し、その効果についての検討を行った。

2. LES の基礎方程式

LES で用いられるフィルタリング操作を施された非圧縮性流体の Navier-Stokes の運動方程式は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{u}_i + \bar{u}_j \bar{u}_{i,j} = & - \left(\bar{p} + \frac{2}{3} k_{SGS} \right)_{,i} \\ & + \left\{ \left(\frac{1}{Re} + \nu_{SGS} \right) \bar{S}_{ij} \right\}_{,j} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\bar{u}_{i,i} = 0 \quad (2)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \quad (3)$$

$$k_{SGS} = \frac{\nu_{SGS}^2}{(C_k \Delta)^2} \quad (4)$$

ここに、 $\bar{\cdot}$ は時間微分、 i は i 方向の偏微分、 $\bar{\cdot}$ は変数の格子平均量、 u_i は i 方向の流速、 Δ は LES の格子スケール、 k_{SGS} は SGS の乱流エネルギーを表す。格子スケール Δ は各要素の面積の平方根とする。ここで、Leonard 項と Cross 項をゼロとし、Reynolds 応力項に SGS モデルとして広く用いられている Smagorinsky モデルを使用する。したがって、SGS 動粘性係数 ν_{SGS} は次式で与えられる。

$$\nu_{SGS} = (C_s \Delta)^2 \left(\frac{\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

また、円柱壁面境界条件には non-slip 型を適用し、円柱壁面付近での急激な速度変化による過大な渦粘性の影響には、Van Driest の damping function^[1] を修正の上、適用する。すなわち次式の W^+ を渦粘性 ν_{SGS} に乗じて解析を行う。

$$W(y^+, \alpha) = 1 - \exp\left(\frac{-\alpha y^+}{25}\right) \quad (6)$$

$$\alpha \equiv 1 + \frac{y^+}{D^+} \quad (7)$$

$$y^+ = \frac{y}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (8)$$

$$D^+ \equiv \frac{D}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (9)$$

ここで、 y^+ は壁面垂直方向の無次元距離、 τ_w は壁面剪断応力、 y は壁面からの距離である。係数 α は解析対象が円柱であるため、その表面の曲率を考慮するために導入したもので、 D^+ は円柱の直径 D を無次元化したものである。なお、要素ごとの渦粘性 ν_{SGS} に乗じる damping function W^+ の値は、各要素の中心位置の値とした。

3. 有限要素方程式

基礎方程式に対し、空間方向にはガラーキン法に基づく有限要素法、時間方向には 3 段階テーラーガラーキン法を用いると、以下のような有限要素方程式が得られる。[1ststep]

$$\begin{aligned} \bar{M}_{\alpha\beta} \bar{u}_{\beta i}^{n+\frac{1}{2}} = & \bar{M}_{\alpha\beta} \bar{u}_{\beta i}^n - \frac{\Delta t}{3} \{ K_{\alpha\beta\gamma j} \bar{u}_{\beta j}^n \bar{u}_{\gamma i}^n \\ & + \left(\frac{1}{Re} + \nu_{SGS}^n \right) S_{\alpha i \beta j} \bar{u}_{\beta j}^n \\ & - \left(\bar{p}_{\beta}^n + \frac{2}{3} k_{SGS}^n \right) H_{\alpha i \beta} \} \end{aligned} \quad (10)$$

[2ndstep]

$$\begin{aligned} \bar{M}_{\alpha\beta} \bar{u}_{\beta i}^{n+\frac{2}{3}} = & \bar{M}_{\alpha\beta} \bar{u}_{\beta i}^n - \frac{\Delta t}{2} \{ K_{\alpha\beta\gamma j} \bar{u}_{\beta j}^{n+\frac{1}{3}} \bar{u}_{\gamma i}^{n+\frac{1}{3}} \\ & + \left(\frac{1}{Re} + \nu_{SGS}^{n+\frac{1}{3}} \right) S_{\alpha i \beta j} \bar{u}_{\beta j}^{n+\frac{1}{3}} \\ & - \left(\bar{p}_{\beta}^{n+\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} k_{SGS}^{n+\frac{1}{3}} \right) H_{\alpha i \beta} \} \end{aligned} \quad (11)$$

[3rdstep]

$$\begin{aligned} A_{\alpha i \beta j} \bar{p}_{\beta}^{n+1} = & - \frac{1}{\Delta t} H_{\alpha \beta i} \bar{u}_{\beta i}^{n+\frac{2}{3}} \\ & - K_{\alpha i \beta \gamma j} \bar{u}_{\beta j}^{n+\frac{2}{3}} \bar{u}_{\gamma i}^{n+\frac{2}{3}} \\ & - \frac{2}{3} T_{\alpha i \beta j} k_{SGS}^{n+\frac{2}{3}} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{\alpha\beta} \bar{u}_{\beta i}^{n+1} &= \bar{M}_{\alpha\beta} \bar{u}_{\beta i}^n - \Delta t \{ K_{\alpha\beta\gamma j} \bar{u}_{\beta j}^{n+\frac{2}{3}} \bar{u}_{\gamma i}^{n+\frac{2}{3}} \\ &+ \left(\frac{1}{Re} + \nu_{SGS}^{n+\frac{2}{3}} \right) S_{\alpha i \beta j} \bar{u}_{\beta j}^{n+\frac{2}{3}} \\ &- \left(\bar{v}_{\beta}^{n+1} + \frac{2}{3} k_{SGS}^{n+\frac{2}{3}} \right) H_{\alpha i \beta} \} \end{aligned} \quad (13)$$

ここに、 Δt は微小時間増分量、 n は時刻ステップ、 $\bar{M}_{\alpha\beta}$ は質量行列の集中化を表す。

4. 解析条件

数値解析例として、図1に示す円柱周りの流れの解析を行った。表1に今回の解析に用いた節点数と要素数を示す。 h_w は円柱直径を $d=1$ としたときの最小メッシュ幅である。図2～図4は円柱近傍である。図1に境界条件を示す。上流境界に $u=1.0, v=0.0$ 、側方境界に $v=0.0$ 、下流境界に $p=0.0$ 、円柱周りに $u=v=0.0$ を与えている。解析した流れのレイノルズ数範囲は $1.0 \times 10^3 \sim 1.0 \times 10^7$ で、時間積分間隔はいずれも無次元時間で $0.002 \sim 0.004$ である。

	節点数	要素数	h_w	damping func.
case1	8028	15680	0.02d	
case2	8660	16960	0.007d	
case3	8028	15680	0.02d	○
case4	4570	8800	0.03d	
case5	4570	8800	0.03d	○

表1 各メッシュの節点数と要素数

5. 解析結果

図5と図6に解析によって得られた抗力係数 C_D とストローハル数 S_L のレイノルズ数に対する変化を実験値と比較して示す[2]。この実験値は円柱表面が粗いときのものである。円柱周りの流れでは、亜臨界域と超臨界域の間の限界レイノルズ数($Re = 3.8 \times 10^5$)付近で後流幅が縮小して抗力係数が低下する現象が知られている[3]。今回、3つのメッシュを用いて解析を行い、全てにおいて抗力係数は減少したが、要素分割の違いにより C_D 値、 St 値共に影響が出ている。また、damping functionを用いてもほとんど差異はなかった。

6. おわりに

Smagorinskyの渦粘性モデルを用いたLESとVan Driestのdamping functionを用いて円柱周りの高レイノルズ数流れの解析を行った。その結果、要素分割の影響は大きいことが分かった。今後、更に要素分割について検討していくとともに、閉塞率等の影響についても検討を行う予定である。

参考文献

- [1] E.R. Van Driest. On turbulent flow near a wall. J.aero.Sci. Vol.23. pp1007-1011.1956.
- [2] 野村 卓史. Smagorinsky モデルを用いた円柱周りの流れの有限要素解析. 第7回数値流体力学シンポジウム. pp279-282.1993.
- [3] 岡内 功, ほか. 耐風構造. 丸善. 1977
- [4] 森西 洋平. 剥離乱流のLES. 第36回生研講習会テキスト - LES入門. 1993.

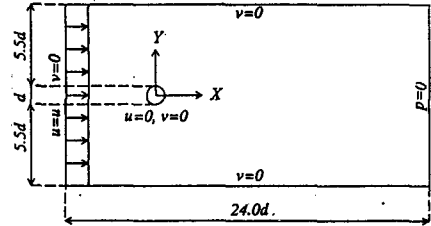


図1 解析領域と境界条件

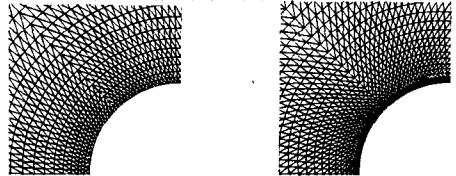


図2 円柱近傍(節点数8028) 図3 円柱近傍(節点数8660)

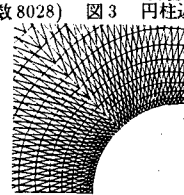


図4 円柱近傍(節点数4570)

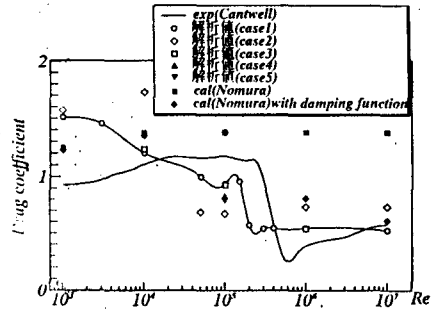


図5 抗力係数の実験値との比較

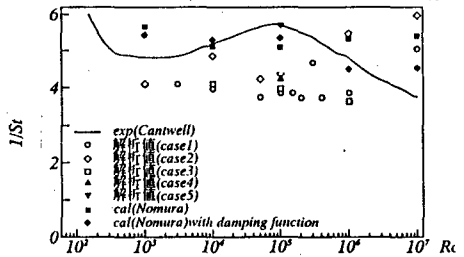


図6 ストローハル数の実験値との比較