

(I-33) 構造物まわりの流れ場における2次元および3次元流れ解析の比較検討

○ 中央大学 学生員 宮森 俊和
中央大学 正会員 極山 和男

1 はじめに

非圧縮粘性流れの数値解析においては、2次元解析が数多くなされているが、特に高レイノルズ数域では3次元解析が必要となってくる。一方、近年の電子計算機の技術の発達に伴い、計算速度の大幅の向上および計算容量の増大がなされ、本来ならば3次元性が考慮されるべき、物体まわりの流れなどに3次元解析が可能となった。

本研究では、3段階テーラーガラーキン有限要素法^[1]を用いて数値解析を行なう。数値解析例としては、円柱まわりの流れ解析を行ない、2次元解析と3次元解析によって得られる特性値について比較検討する。また、計算効率を向上させるため、有限要素方程式中の係数行列の積分法として、解析的に積分する手法を用いる。

2 基礎方程式および離散化手法

流れの場を支配する基礎方程式には、(1)式のナビエ・ストークスの運動方程式と、(2)式のオイラーの連続方程式を用いる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} + p_{,i} - \frac{1}{R_e} u_{i,jj} = 0 \quad (1)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad (2)$$

ここで、 u_i は*i*方向の偏微分、 u_i は*i*方向の流速、 p は圧力、 R_e はレイノルズ数を表す。

基礎方程式(1)および(2)式を離散化するにあたり、空間方向の離散化にはガラーキン法に基づく有限要素法を、時間方向の離散化には3段階の陽的な解法を用いた。また、圧力のポアソン方程式は陰的に解いた。なお、要素としては、2次元解析の場合には4節点四角形1次要素、3次元解析の場合には8節点六面体1次要素を用いた。最終的に、以下のような有限要素方程式が得られる。

< 1st - step >

$$\bar{M}(u_i^n - u_i^{n+\frac{1}{2}}) = \frac{\Delta t}{3} (K_j u_j^n u_i^n - H_i p^n + \frac{S_{jj} u_i^n}{R_e}) \quad (3)$$

< 2nd - step >

$$\bar{M}(u_i^n - u_i^{n+\frac{1}{2}}) = \frac{\Delta t}{2} (K_j u_j^{n+\frac{1}{2}} u_i^{n+\frac{1}{2}} - H_i p^n + \frac{S_{jj} u_i^{n+\frac{1}{2}}}{R_e}) \quad (4)$$

< 3rd - step >

$$A_{ii} p^{n+1} = -\frac{H_i u_i^n}{\Delta t} - K_{ij} u_j^{n+\frac{1}{2}} u_i^{n+\frac{1}{2}} \quad (5)$$

$$\bar{M}(u_i^n - u_i^{n+1}) = \Delta t (K_j u_j^{n+\frac{1}{2}} u_i^{n+\frac{1}{2}} - H_i p^{n+1} + \frac{S_{jj} u_i^{n+\frac{1}{2}}}{R_e}) \quad (6)$$

ここで、 $\bar{M}$, K_j , H_i , S_{jj} , A_{ii} , H_i , K_{ij} は係数行列であり、 $\bar{M}$ は質量行列の集中化を表している。

本研究では、計算の効率を向上させるために、係数行列の積分計算に解析的積分を導入している。具体的に、8節点六面体1次要素を用いた場合の質量行列の計算は、ガウスの求積法を用いると(7)式ようになる。

$$\begin{aligned} \int_V (\Phi_\alpha \Phi_\beta) dV &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\Phi_\alpha \Phi_\beta) dx dy dz \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\Phi_\alpha \Phi_\beta) |J| d\xi d\eta d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \Phi_\alpha(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Phi_\beta(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) |J| W_i W_j W_k \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 Φ は形状関数、 ξ, η, ζ は積分点の座標、 n は積分点の数、 W_i, W_j, W_k は*ξ*方向、*η*方向、*ζ*方向の重み関数を表す。

そして、計算の高速化を図るために、(7)式のヤコビアンマトリックスのみをガウスの求積法(1点積分)で求め、残りの部分を解析的に積分して求める。最終的に、(8)式が得られる。

$$\int_V (\Phi_\alpha \Phi_\beta) dV = |J| \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\Phi_\alpha \Phi_\beta) d\xi d\eta d\zeta \quad (8)$$

3 数値解析例

3.1 解析条件

数値解析例としては、円柱まわりの流れ解析を行なった。なお、円柱の直径を*d*と定義した。

2次元解析では、図1に示すような解析領域に対して、4節点四角形1次要素で分割した(総節点数4388、総要素数4224)。境界条件は、流入境界に $u=1.0$, $v=0.0$ 、流出境界に $p=0.0$ を与えた。また、円柱まわりは $non-slip$ 条件($u=v=0.0$)、側壁では $slip$ 条件($v=0.0$)とした。解析した流れのレイノルズ数の範囲は100~1000である。

3次元解析では、図2に示すような解析領域に対して、8節点六面体1次要素で分割した(総節点数21940、総要素数16896)。なお、平面的な要素分割は2次元解析と同様とし、鉛直方向を4層に分割した。境界条件は、流入境

界に $u=1.0$, $v=w=0.0$ 、流出境界に $p=0.0$ を与えた。また、円柱まわりは *non-slip* 条件 ($u=v=w=0.0$) 、側壁では *slip* 条件、(側方境界は $v=0.0$ 、上方境界および下方境界は $w=0.0$) とした。

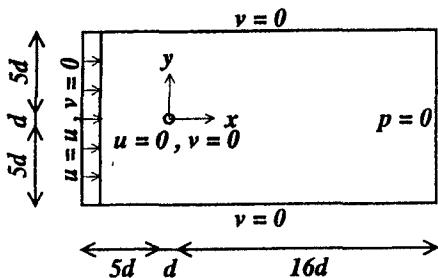


図1. 2次元解析の解析条件図

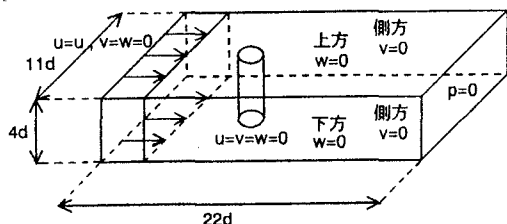


図2. 3次元解析の解析条件図

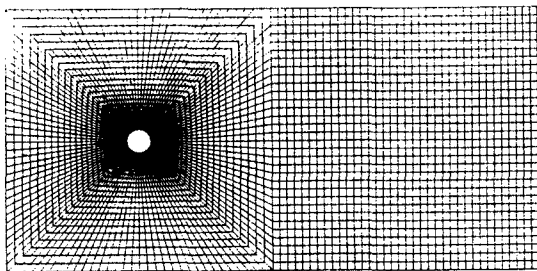


図3. 平面的な要素分割図

3.2 解析結果および考察

本研究で得られた数値解析結果として、図4に抗力係数を、図5にストローハル数を示す。ここで、抗力係数は無次元時間 200 から 300 までの平均値を、ストローハル数は無次元時間 100 から 300 までの揚力係数の時刻歴変動をスペクトル解析により求めた卓越した周波数を示している。図より、得られた解析値は実験値と比べて良い傾向を示している。しかし、高レイノルズ数になるにつれて、解析値と実験値との差異が大きくなる傾向にある。この差については、3次元性の影響やガラーキン法による数値的不安定性が考えられ、今後の検討が必要である。

4 おわりに

現段階では、2次元解析しか行っていない。2次元解析結果と3次元解析結果との比較については、発表時に述べる予定である。

以上の本報告から次の二つのことが言える。

1. レイノルズ数が 100 ~ 500 程度であれば、2次元解析でも充分に良い傾向を掴むことができる。
2. レイノルズ数が高くなると数値解が振動してしまうので、何らかの安定化手法を用いる必要がある。

今後は、3次元性が顕著に現われる高レイノルズ数流れの解析を高精度かつ高速に行なう数値解析法を構築する予定である。

参考文献

- [1] C.B.Jiang, M.Kawahara and K.Kashiyama: " A Three Step Finite Element Method for Convection Dominated Incompressible Flow ", Computational Fluid Dynamics Journal, vol.1 no.4, pp447-466, (1993)
- [2] 畑中 勝守: "多段階有限要素法による非圧縮粘性流れの順・逆解析に関する計算力学的研究", 中央大学博士学位論文, (1993)
- [3] "風工学における流れの数値シミュレーション法入門": 土木学会, (1992)
- [4] 棚橋 隆彦: "GSMAC-FEM 数値流体力学の基礎と応用": アイビーシー, (1991)

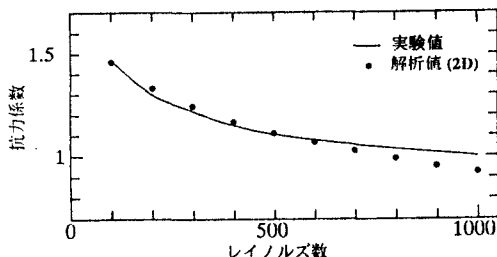


図4. 抗力係数の実験値との比較

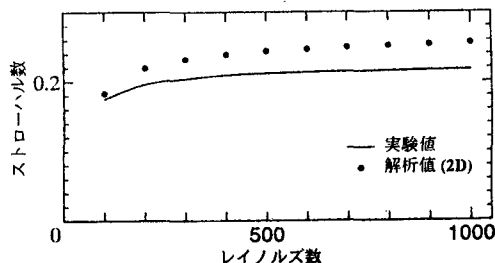


図5. ストローハル数の実験値との比較