(I −32) Q1/P0 要素を用いた有限要素法流れ解析における安定化について

中央大学大学院　学生員　○猪股　渉
中央大学　　　　正　員　　樫山　和男

1. はじめに

Navier-Stokes 方程式を有限要素法により解く時に数値解が不安定に振動する場合があり、その原因として以下の二つのことが考えられる。まず一つ目としては、流速・圧力の補間関数の組み合わせが下限上限条件を満たさない場合、例えば流速・圧力ともに一次で補間する P1/P1、Q1/Q1 要素、また流速双一次·圧力 0 次で補間する Q1/P0 要素などを用いる場合で、これらの組み合わせでは計算条件・境界条件によっては数値解の不安定振動が生じる。本研究では Q1/P0 要素を用いるものとし、不安定振動を抑えるため圧力安定化行列[1][2] を用い、その有効性を確認する。もう一つの原因は解析対象が高レイノルズ数流れになった場合に移流項が卓越することにあり、これにより通常の Galerkin 法では得られる数値解は振動してしまう。これを防ぐためには何らかの風上化を行う必要があり、ここでは SUPG 法[3][4] を適用する。また時間積分の精度を上げることにより同様な効果が得られる BTD 法、Taylor-Galerkin 法についても検討を行い、Q1/P0 要素を用いた有限要素法流れ解析のための高速で省メモリーな安定化手法の構築を目指す。

2. 基礎方程式

流れの場を支配する基礎方程式は Navier-Stokes の運動方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} = -p_{,i} + \frac{1}{Re} u_{i,jj} \qquad (1)$$

と非圧縮性流体の連続式

$$u_{i,i} = 0 \qquad (2)$$

である。ここで、$,i$ は i 方向の偏微分、u_i は i 方向の速度成分、p は圧力、Re はレイノルズ数を示す。

3. 時間方向離散化と計算のアルゴリズム

式 (1) を前進 Euler 法により流速は陽的に、圧力は陰的に時間方向離散化を行う。

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_j^n u_{i,j}^n = -p_{,i}^{n+1} + \frac{1}{Re} u_{i,jj}^n \qquad (3)$$

以上の式と、$n+1$ 時間ステップにおける連続式

$$u_{i,i}^{n+1} = 0 \qquad (4)$$

を時間進行の基礎式とする。

式 (3) において Frctionl step 法に基づき既知量をまとめると以下のようになる。

$$\bar{u}_i = u_i^n - \Delta t \left(u_j^n u_{i,j}^n - \frac{1}{Re} u_{i,jj}^n \right) \qquad (5)$$

これにより、式 (3) は

$$u_i^{n+1} + \Delta t\, p_{,i}^{n+1} = \bar{u}_i \qquad (6)$$

と変形でき、式 (4) と連立することにより u_i^{n+1} と p^{n+1} を求めることができる。なお BTD 法、Taylor-Galerkin 法についても同様の手順で計算するものとする。

4. ポアソン方程式の導出と圧力安定化行列

式 (4) と式 (6) を通常の Galerkin 法により離散化すると以下のような連立一次方程式が得られる。なお運動方程式は SUPG 法により離散化する。

$$\begin{bmatrix} \bar{M} & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{n+1} \\ P^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

この連立一次方程式において係数行列の右下部が 0 となることにより、境界条件によってはチェッカーボード状の圧力振動が起こる。それを避けるために右下部に拡散型の安定化行列 D を代入する[1][2]。安定化行列を図-1 のように 9 の要素からなる 2 次元メッシュの場合の 5 要素、つまり第 5 行について書き下すと

$$\begin{aligned} D_{5j} p_j &= a_5 a_2 (p_5 - p_2) + a_5 a_4 (p_5 - p_4) \\ &\quad + a_5 a_6 (p_5 - p_6) + a_5 a_8 (p_5 - p_8) \end{aligned} \qquad (8)$$

となり、a_i は要素 i ごとに決められる安定化パラメーターで以下のように与えている。

$$a_i = \alpha \sqrt{(C^T \bar{M}^{-1} C)_{ii}} \qquad (9)$$

ここで、α は無次元パラメーターで 2 次元計算の場合は 0.25、3 次元計算の場合は 0.50 としている。

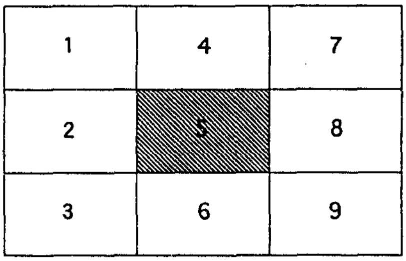

図-1　2 次元有限要素メッシュ例

式 (4) に安定化行列を代入し、代数的に変形することにより圧力の部分を分離すると、D を書き入れたポアソン方程式が以下のよう得られる。

$$(C^T \bar{M}^{-1} C + D)\, P^{n+1} = C^T \bar{u}^n \qquad (10)$$

ポアソン方程式の解法には Element-by-Element SCG 法を用いることにより完全ベクトル化を実現している。

5. 数値解析例

5.1. 安定化行列の有効性の確認

安定化行列の有効性を示すのに、正方形 Cavity 内流れ（Re=1000）を取り上げる。安定化行列を用いない場合、用いる場合の比較を図-2 に示す。

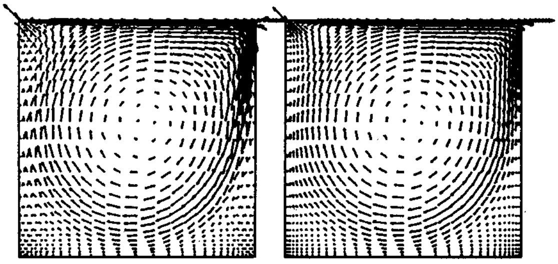

図-2　安定化行列を用いない場合（左）と用いる場合（右）の結果

5.2. 各風上化手法の比較

各手法の解析精度の比較を行うのに、図-3 の様な初期値で粘性の影響の無い流れを与え、運動エネルギーの減衰を考える（人工粘性を過度に与えると運動エネルギーは減衰してしまう）。ここでは $Re = 10^6$ とし、表-1 に示す各手法により解析を行い比較したものが図-5 である。

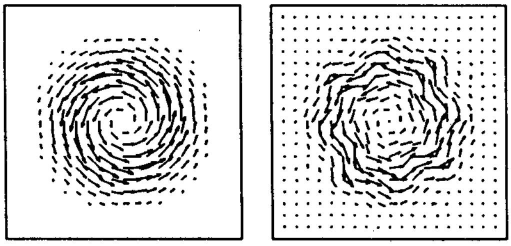

図-3　初期条件（左）及び Galerkin 法による結果（右）

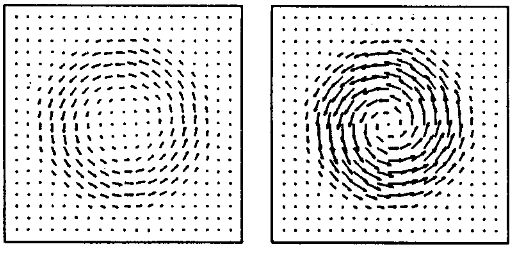

図-4　SUPG 法を移流項のみ適用した結果（左）すべての項に適用した結果（右）

表-1　解析に用いた手法

時間積分	空間離散化
前進 Euler 法	Galerkin 法
前進 Euler 法	SUPG 法
前進 Euler 法	SUPG 法（移流項のみ）
前進 Euler 法	beyond SUPG
BTD 法	Galerkin 法
BTD 法	SUPG 法
Taylor-Galerkin 法	Galerkin 法

※ すべて安定化行列を用いている

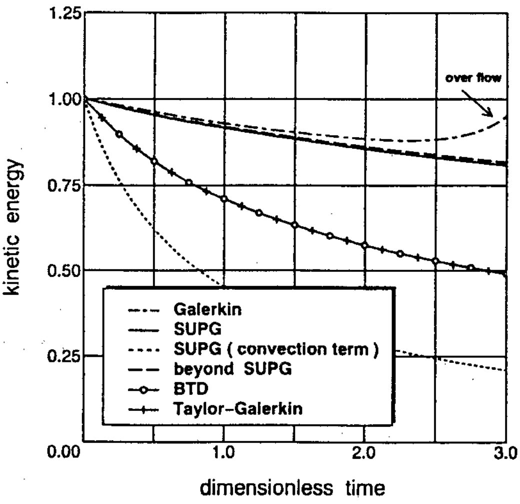

図-5　運動エネルギーの減衰による各手法の比較

6. おわりに

Q1/P0 要素を用いた有限要素法流れ解析における、高速で省メモリーな安定化手法を構築した。Q1/P0 要素特有のチェッカーボード状の圧力振動は圧力安定化行列により除去でき、また高レイノルズ数域においても SUPG 法をすべての項に適用することにより高精度で安定した解析がおこなえることを示せた。

参考文献

[1] D.J. Silvester and N. Kechkar, " Stabilized bilinear-constant velocity-pressure finite elements for the conjugate gradient solution of the stokes problem ", Compututer Methods in Applied Mechanics Engineering 79. pp71-86. 1990.
[2] 水上昭, " Q_1-P_0 要素による FEM 流れ解析のための安定化行列 ", 第 8 回数値流体シンポジウム報文集, pp647-650. 1994.
[3] A.N. Brooks and T.J.R. Hughes, " Streamline upwind / Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations ", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 32, pp199-259, 1982.
[4] T.E. Tezduyar, S. Mittal and R. Shih, " Time-accurate incompressible flow computations with quadrilateral velocity-pressure elements", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 87, pp364-384, 1991.