

(I - 31) 材料不均一性に起因する応力範囲のばらつきの推定

東京大学 学生員 久保 淳一郎
東京大学 正 員 堀 宗朗

1. まえがき

自然材料が人工材料と異なる点の一つに不均一性が挙げられる。岩盤の初期応力や地殻応力には、岩の不均一性が原因となって大きなばらつきが存在し、地下構造物の設計・地震の長中期予知・断層破壊のメカニズムを考える際そのばらつきの度合を明らかにする必要がある。また、物性値の確率分布が与えられた不均一材料に対して応力の確率分布を求めることは、不均一材料の力学特性を理解する上で重要である。ところが、不均一材料の応力範囲の推定の難しさは不均一性の間に働く相互作用の評価が困難であることに起因しているため、確率分布の範囲を近似的に求めることが本研究の第一の目的、最大値・最小値という応力範囲の上限下限をより正確に推定することを第二の目的とした。また、この理論の妥当性を検討するため、モンテカルロシミュレーションによる結果と比較した。

2. 応力の確率分布の推定

問題設定を次のようにする。すなわち、場所に依存しない確率密度関数 $\varphi_C(C)$ を持つ弾性テンソル場 $C(x)$ によって表される不均一材料 V に平均のひずみ ϵ^0 が働く場合を考え、領域 Ω の平均応力 $\bar{\sigma}$ の確率密度関数 $\varphi_\sigma(\sigma)$ を求める。弾性テンソル場を $C(x) = C^0 + \delta C(x)$ としてひずみ場 $\epsilon(x)$ に対して $\epsilon^0 + \epsilon^{(1)}(x) + \dots$ という摂動を取ると、 $\epsilon^{(n)}(x)$ に対応する変位場を $u^{(n)}(x)$ とすれば、 $C_{ijk}^0 u_{k,i}^{(n)}(x) + (\delta C_{ijkl}(x) \epsilon_{kl}^{(n-1)})_{,i} = 0$ となり、等価介在物法が適用できる。ここで、弾性テンソル C^0 を持つ無限体のグリーン関数 g^0 を用いて $u^{(n)}(x)$ を近似的に計算し、 C^0 と Ω によって決まるエシェルビーのテンソルに対応した定テンソル I^0 と単位テンソル I を用いれば、 $\bar{\sigma}^{(n)} = (C^0 : I^0 + I) : (\int_\Omega \delta C(x) : \epsilon^{(n-1)}(x) dV_x)$ という平均応力に関する近似式が得られる。ここで、 $\delta C(x)$ が統計的に一様であるから $\epsilon^{(n-1)}(x)$ も統計的に一様となり、漸化式 $\varphi_\sigma(\bar{\sigma}^{(n)}) = \int \int \delta(\bar{\sigma}^{(n)} = (C : I^0 + I) : \epsilon^{(n-1)}) \varphi_C(C) \varphi_\epsilon(\bar{\epsilon}^{(n-1)}) dC d\bar{\epsilon}^{(n-1)}$ が得られ、右図 (図 1) に示すようにこの漸化式を順に n まで解き、逐次的に密度関数のコンボリューションを計算することで平均応力の確率密度関数が決定できる。これがはじめの問題設定の近似解となる。

摂動法による確率密度関数の推定 (概念図)

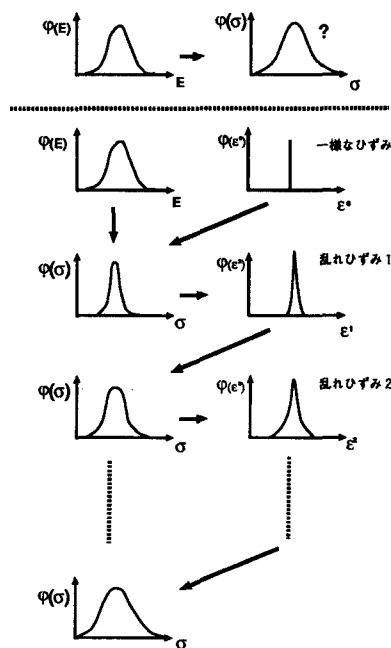


図 1 確率論に基づく摂動法

3. 応力の上下限の推定

相互作用は不均一性の数と相対的な位置によって決定できるため、不均一性を介在物に置き換えて次の問題を設定する。すなわち一様弾性 C^M を持つ無限体に任意の弾性テンソル C^α を持つ介在物群 Ω^α を任意の個数で任意の位置 x^α に置き、遠方ひずみが ϵ^0 として与えられたときの Ω^α の平均応力の最大値・最小値を求める。無限体の弾性テンソル場を $C(x) = C^M + \sum_\alpha \phi^\alpha(x)(C^\alpha - C^M)$ とし、 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} s^*(x) = s^{*0} = C^M : \epsilon^0$ を満たすアイゲン応力場 $s^*(x)$ に対して汎関数 $J(s^*) = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_B \frac{1}{2} s^*(x) : ((C(x) - C^0)^{-1} : s^*(x) -$

$\gamma^0(x; s^*) - 2\epsilon^0 + \frac{1}{2}s^0 : \epsilon^0 dV$ を定義する。ただし $\gamma^0(x; s^*) = \int \gamma^0(x-y) : s^*(y) dV_y$ は $s^*(x)$ によって発生するひずみ場である。 $C(x) - C^0$ が正・負定値となる $C^0 = C^\pm$ を用いると、 $J = J^\pm$ は最小値・最大値を持つため、ひずみエネルギーの変化を挟む式 $J^-(s^*) + \frac{1}{2}(\lim_{B \rightarrow \infty} \int_B \epsilon^d dV) : C^- : \epsilon^0 \leq \frac{1}{2}(\lim_{B \rightarrow \infty} \int_B \sigma^d dV) : \epsilon^0 \leq J^+(s^*) + \frac{1}{2}(\lim_{B \rightarrow \infty} \int_B \epsilon^d dV) : C^+ : \epsilon^0$ が得られる。 $C^\pm$ を設定し、それぞれ対応する関数の最小値・最大値を与えるアイゲン応力場を求めることによって、ひずみエネルギーの変化の上下限を与える近似解が計算される。

4. 結果と考察

(1) 有限要素法を用いたシミュレーション

簡単のため、ポアソン比が 0.25 の等方性材料 $M^1 \cdot M^2$ からなる 2 相系不均一材料を考え、全体としては各々が体積含有率 50%ずつとする。ここでヤング率の比 E^1/E^2 は 2 ないし 100 を取ることにし、 $\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22}$ として定義される応力を分布の目安とする。上で設定された不均一材料からなる正方形の板を細かく裁断し、一様応力がかかる時の応力場を有限要素法で計算し、応力分布をシミュレートする。

(2) 推定された応力の確率密度関数の精度

第 2 章で得られた応力の確率密度関数の精度を検証する。右図 (図 2・図 3) の比較によって $E^1/E^2 = 2$ の場合、推定された確率密度関数はシミュレーションの結果とよく一致している。 $E^1/E^2 = 100$ の場合、確率密度関数の傾向は似ており柔らかい M^2 に関しては確率密度関数の推定は概ね良いが、固い M^1 に関しては確率密度関数の推定精度が悪い。

(3) 推定された応力の上下限の妥当性

次に第 3 章で得られた応力の上下限の妥当性を検討する。 $E^1 > E^2$ であるから、 $C^0 = C^1$ の場合が応力の上限、 $C^0 = C^2$ の場合が応力の下限を与えることになる。右表に、配置する介在物の個数に対する、各々近似計算された介在物の平均応力の上下限値を示す。介在物が 2 個の場合には一応の応力範囲を押えてはいるものの下限の推定があまり良くない。

次に介在物が 3 個の場合を考え正 3 角形をなすように並ぶ場合を設定すると、先程と比べて応力の下限の推定精度がかなり向上した。ところが介在物の個数をこれ以上増やしても下限の推定精度は向上しなかった。これは正 3 角形の配置が最も密な配置であるからと言える。

5. 結論

本研究は、材料不均一性に起因する応力のばらつきを推定するため、物性の確率密度関数が与えられた不均一材料に対して、応力の確率密度関数分布を求めることを第一の目的、最大値・最小値という応力範囲の上下限を求めることを第二の目的としたが、比較的物性の差が小さい場合、この 2 つの手法によって応力の確率密度関数と応力の上下限値を精度よく推定することができた。

参考文献

- 1) 堀 宗朗 “等価介在物法とその応用” 等、土質学会 逆解析委員会、勉強会資料
- 2) Toshio Mura “Mechanics of elastic and inelastic solids3” Micromechanics of defects in solids
- 3) 中桐 滋・久田 俊明 “確率有限要素法入門” 培風館

図 2 : $E^1/E^2 = 2$ の場合

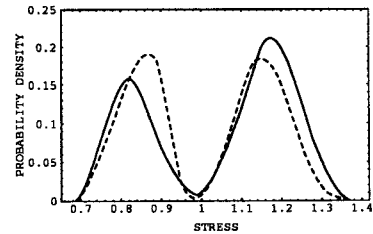
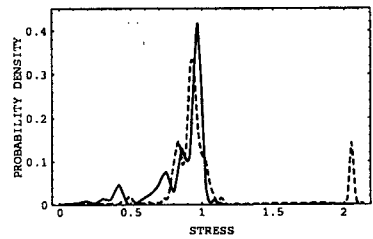


図 3 : $E^1/E^2 = 100$ の場合



(注) 破線…シミュレーションによる結果
実線…確率論に基づく摂動法による結果

[表] 近似計算された平均応力の上下限値

方法	最小値	最大値
シミュレーションによる結果	1.01	1.41
介在物が 2 個の場合	0.78	1.52
介在物が 3 個の場合	0.95	1.52
介在物が 4 個の場合	0.92	1.52