（Ⅰ－16） ラプラス変換ーガレルキン法による移流拡散方程式の解析

佐藤工業　正　員　児玉敏雄
中央大学　正　員　川原睦人

1. はじめに

移流拡散方程式にラプラス変換を施し，周波数空間で得られる支配方程式をガレルキン有限要素法で解き，数値ラプラス逆変換を用いることにより時間領域の変数を求める解析手法を示す．この方法は，微分方程式から時間項を取り除けるため，透水係数比の大きい地盤構造における地下水解析などでしばしば問題となる非定常計算の不安定な問題を回避でき，現象時間の長いものと短いものを同じ数値計算のレベルで扱うことが可能である．本研究では，手法の妥当性を検証するため，１次元の物質移動問題の解析を実施し解析解との比較を行った．その結果，工学的に妥当な結果が得られることがわかった．

2.ラプラス変換ーガレルキン有限要素法

ラプラス変換を施した後の，移流拡散方程式および境界条件は次のようになる．

$$p\overline{C}+u\frac{\partial\overline{C}}{\partial x}+v\frac{\partial\overline{C}}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\left(D_{xx}\frac{\partial\overline{C}}{\partial x}+D_{xy}\frac{\partial\overline{C}}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(D_{yy}\frac{\partial\overline{C}}{\partial y}+D_{yx}\frac{\partial\overline{C}}{\partial x}\right)-\overline{C}^{*}=0 \quad \text{in } \Omega \quad \cdots(1)$$

$$\overline{C}=\overline{C}_0(p) \quad \text{on } \Gamma_1 \ \cdots(2) \quad -n_x(D_{xx}\partial\overline{C}/\partial x+D_{xy}\partial\overline{C}/\partial y)-n_y(D_{yy}\partial\overline{C}/\partial y+D_{yx}\partial\overline{C}/\partial x)=\overline{g} \quad \text{on } \Gamma_2 \ \cdots(3)$$

$$n_x[u\overline{C}-(D_{xx}\partial\overline{C}/\partial x+D_{xy}\partial\overline{C}/\partial y)]+n_y[v\overline{C}-(D_{yy}\partial\overline{C}/\partial y+D_{yx}\partial\overline{C}/\partial x)]=\overline{q} \quad \text{on } \Gamma_3 \ \cdots(4)$$

ここに，Ω は解析領域を表し，$\Gamma_1, \Gamma_2\ \Gamma_3$ は基本境界および自然境界を表す．C, D, g, q はそれぞれ，濃度，拡散係数，フラックスを表し，$\overline{C}$ はラプラス変換された変数を意味する，u, v は移流速度であるが時間に対して一定であるものとする．また p はラプラス変換のパラメターである．周波数領域における支配方程式 (1) をガレルキン法を用いて離散化する．得られた方程式をマトリックス形式で表すと次式のようになる．

$$\left(p\begin{bmatrix}Suu & Suc\\ Scu & Scc\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}Euu & Euc\\ Ecu & Ecc\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}\overline{C}u\\ \overline{C}c\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\overline{B}u\\ \overline{B}c\end{Bmatrix} \quad \cdots(4)$$

ここで，S, E, C, B はそれぞれ質量，移流／拡散，濃度，境界条件マトリックスの成分を表し，添字 u, c はそれぞれ，内部節点および境界上の節点に関する係数であることを示す．したがって周波数領域における変数は，次式で求めることができる．

$$([Euu]+p[Suu])\{\overline{C}u\}=\{\overline{B}u\}-([Euc]+p[Suc])\{\overline{C}c\} \quad \cdots(5)$$

(5) 式を解く際，ラプラス変換のパラメター p は以下のように設定する．

$$p_k=p_0+k\pi i/T \quad (k=1,2N+1) \quad \cdots(6), \quad p_0=-\mathrm{In}(E_R)/2T \quad \cdots(7)$$

したがって，(5) 式を2N+1個の pk について解くことになる．ここで，T は計算対象時間，N は収束に必要な正の整数（通常5～25），E_R は誤差パラメター（通常 10^{-2}～10^{-6}），$i=\sqrt{-1}$ である．次に(5) 式で求めた周波数領域上での変数の値に数値ラプラス逆変換を施し時間領域に変換する．数値ラプラス逆変換には数々の手法が提案されている．ここでは，Sudicky[1] が用いているCrump の方法[2]を逆変換の公式として用いる．この方法は，ラプラス変換に着目時刻 t を含まず，計算が非常に簡単である．数値ラプラス逆変換は次式で行う．

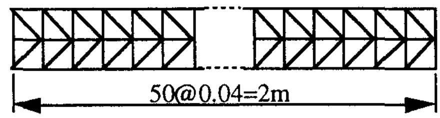
$$C_j(t)=\frac{1}{T}\exp(p_0t)[\frac{1}{2}\overline{C}_j(p_0)+\sum_{k=1}^{2N+1}(\mathrm{Re}\{\overline{C}_j(p_k)\}\cdot\cos(k\pi t/T)-\mathrm{Im}\{\overline{C}_j(p_k)\}\cdot\sin(k\pi t/T))] \quad \cdots(8)$$

ここで，Re および Im はそれぞれ，複素数から実数部および虚数部をとることを意味する．

3．数値計算例

汚濁物質が地下水に運ばれる現象を想定し，1次元の移流拡散方程式の解析を行った．図－1に解析領域を示す．領域左端部に C=1.0 を与え，結果を分散係数 D と一定流速 u および有限要素長 Δx で表されるペクレ数

$$Pe = \frac{u\Delta x}{D} \quad \cdots(9)$$

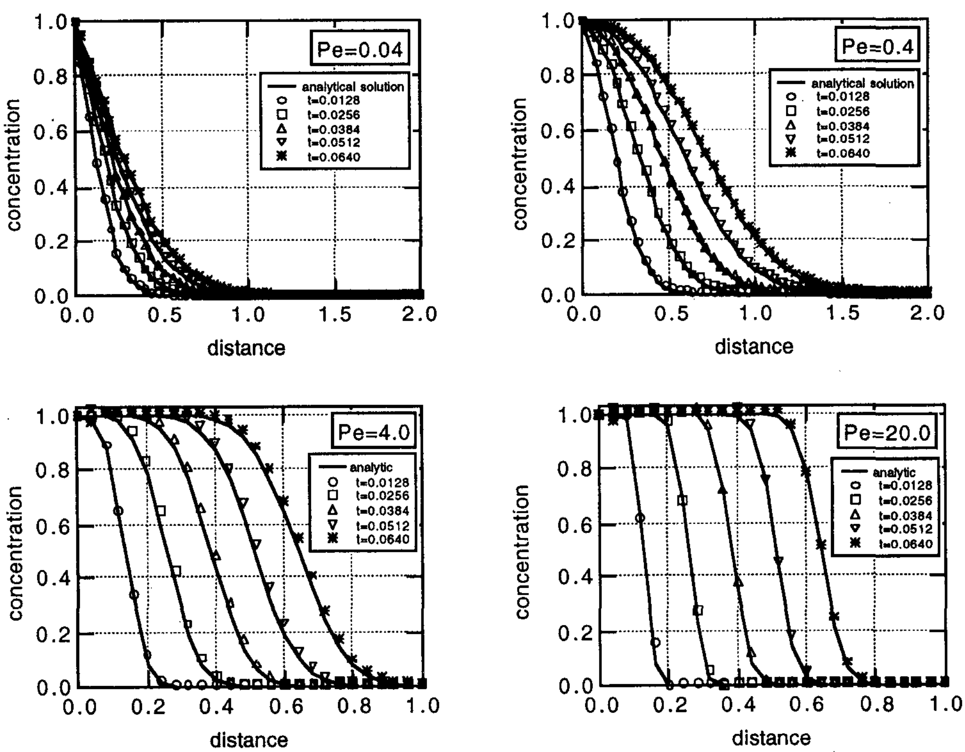


図－1 有限要素分割

をパラメターとし，解析解と比較することとした．ラプラス変換には，N=10, ER=1×10^{-2}, T=0.064 sec を用いた．この問題の解析解は次式で与えられる．

$$C(x,t) = \frac{1}{2}\left\{ \mathrm{erfc}\left(\frac{x-ut}{\sqrt{4Dt}}\right) + \exp\left(\frac{ux}{D}\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{x+ut}{\sqrt{4Dt}}\right)\right\} \quad \cdots(10)$$

ここに，erfc は補誤差関数を意味する．図－2にペクレ数 0.04, 0.4, 4.0, 20.0 における各時刻の濃度分布を解析解と比較し示す．ペクレ数が 0.04, 0.4 のように小さい場合には解析解とよく一致していることがわかる．ペクレ数が 4.0, 20.0 のように比較的大きい場合には一部に若干の差異がみられる．ただし，誤差の大きさは最大2％程度であり，工学的にみて十分実用的であるといえる．ただし，ペクレ数がこれ以上大きくなると解の振動は，通常の非定常計算と同様大きくなるので，別途対策が必要となる．



図－2 濃度の時間変化

4．おわりに

ラプラス変換とガレルキン法を用いた物質移動問題の解析手法を示した．検討の結果，ペクレ数が 20 程度までの問題に対しては実用上十分な精度が得られることがわかった．

参考文献

1) Sudicky, E.A.: The Laplace Transform Galerkin Technique : A Time-Continuous Finite Element Theory and Application to Mass Transport in Groundwater, Water Resour. Res., 25(8), pp.1833-1846, 1989.

2) Crump, K.S.: Numerical Inversion of Laplace Transforms using a Fourier Series Approximation, J. Assoc. Comput. Mach., 23(1), pp.89-96, 1976.