（Ⅰ－14） 大規模連立一次方程式における高並列計算手法の検討

中央大学　学員　○玉井　典
中央大学　正員　　樫山　和男

1. はじめに

近年、並列計算機を用いた有限要素法による数値解析例が多く報告され、陽的計算においては計算時間の短縮と計算容量の分散化に成功している [1] 。しかし、連立一次方程式 (有限要素方程式) の陰的な並列解法に関する報告は少なく効率的な計算手法の開発が望まれている。本報告は、ラプラス方程式の有限要素解析を例にとり効率的な大規模連立一次方程式の並列解法の構築に関する検討を行ったものである。

2. 支配方程式

ポテンシャル流れの基礎方程式と境界条件は以下のように与えられる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x},\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad (2)$$

$$\phi = \hat{\phi} \quad on\ S_1 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad on\ S_2 \qquad (4)$$

ここで、ϕ は速度ポテンシャル、u, v は x, y 方向の速度成分、S_1 はディレクレ境界条件、S_2はノイマン境界条件、n はS_2 境界上に立てた法線の方向である。

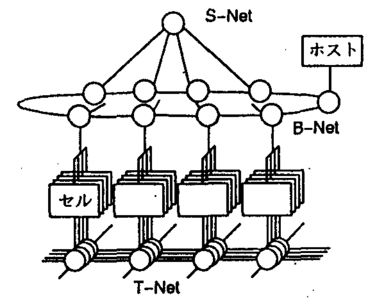


図１： AP1000 構成図

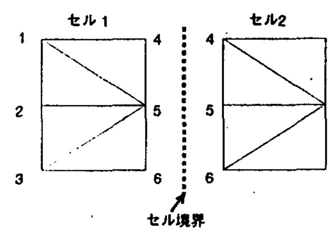


図２： 有限要素モデル図

3. 有限要素方程式

(1) 式に対しガラーキン法に基づく重み付き残差法を適用し、(4) 式を代入する。そして、空間方向の離散化には 3 節点三角形要素を用いると次の有限要素方程式を得る。

$$(A_{\alpha x\beta x} + B_{\alpha y\beta y})\phi_\beta = 0 \qquad (5)$$

ここで、$A_{\alpha x\beta x}$ 、$B_{\alpha y\beta y}$ は有限要素法により得られる係数マトリックスである。(5) 式は (3) 式を代入した後、陰的に解くが、連立一次方程式の解法には共役勾配法 (CG 法) を用いる。これは、並列計算は大規模な問題を扱うことが前提になっており、また、CG 法が大規模な問題を解くための実用的なプログラムを容易に作成できる[2]ためである。また、Element-by-Element SCG 法[3]を用い計算容量の大幅な節約が可能となる。

4. 並列計算

4.1 並列計算機　並列計算機には、富士通社の分散メモリ (MIMD) 型並列計算機 AP1000(図 1) を用いる。AP1000 はセルと呼ぶ最大 1024 台まで接続可能なプロセッサと、ホストと呼ぶ S-4 ワークステーション、及び 3 種類の通信ネットワークから構成される。各セルはメモリ 16MB、スピード性能 8.33MFLOPS をもちトーラス型のネッドワークで接続されている。1024 台を接続すると 8.53GFLOPS のピーク性能が得られる。また、T-Net と B-Net はデータ送受信に、S-Net は同期をとるときに使用する。

4.2 領域分割法　並列計算を行うにあたり Farhat が提案した自動領域分割法[4]を適用する。この分割法により任意の有限要素メッシュが小領域に分割され、かつ、各小領域の要素数、領域境界節点数がほぼ同数となる。そのため並列計算時の各プロセッサの負荷の均等化、通信時間の短縮が可能になる。

4.3 並列計算法　並列計算法を説明するにあたり図 2 に示す節点数 9、要素数 8 を有する有限要素モデルを考える。そして 2 つの小領域にセルを割り当てて並列計算を実行する。セル 1 では節点 1 から節点 6、セル 2 では節点 4 から節点 9 上の物理量をそれぞれ独立に求めることになる。

ところで、SCG 法の計算過程では (6) 式のようなベクトルの内積を知る必要がある。

$$(\mathbf{r},\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{9} r_i^2 = r_1^2 + \cdots + r_9^2 \tag{6}$$

そこで、各セルでベクトル r の成分の 2 乗和を求める。

$$\text{セル1} \quad \sum_{i=1}^{6} r_i^2 = r_1^2 + \cdots + r_6^2 \qquad \text{セル2} \quad \sum_{i=4}^{9} r_i^2 = r_4^2 + \cdots + r_9^2 \tag{7}$$

領域全体の 2 乗和を知るため互いにデータを交換すると、

$$\sum r_i^2 = (r_1^2 + \cdots + r_9^2) + \underline{(r_4^2 + r_5^2 + r_6^2)} \tag{8}$$

となり、下線部(セル境界上の節点に関する値)が重複してしまい単純にデータ交換をするだけでは正しい内積計算が行えない。これは、セル境界上の節点 4、5、6 に関する計算を両セルが行っていることに起因する。この解決策として表 1 に示すデータを予め各セルに与えておく。そして各セルでこのデータの 2 乗和を求めると

$$\text{セル1} \quad \sum_{i=4}^{6} r_i^2 = r_4^2 + r_5^2 + r_6^2 \qquad \text{セル2} \quad \sum r_i^2 = 0 \tag{9}$$

各々のセルで (7) 式と (9) 式の差をとると、

$$\text{セル1} \quad \sum_{i=1}^{3} r_i^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \qquad \text{セル2} \quad \sum_{i=4}^{9} r_i^2 = r_4^2 + \cdots + r_9^2 \tag{10}$$

ここでデータ交換を行えば、(6) 式を得る。このデータ交換は全セルを対象にした通信が必要になるが、AP1000 に備わった通信サブルーチン(全セルのデータの総和を求めるもの)を 1 度呼び出すだけで簡単に行える。

5. 数値解析例

5.1 解析条件　幅 5.0ᵐ、長さ 10.0ᵐ の長方形水路モデルに対して節点数が約 10000, 20000, 50000 の 3 通りに要素分割し、4,16,32,48 台のセルを用いて並列計算を行った。また、図 3 は節点数 50000、セル数 32 台のときの領域分割図である。

5.2 性能評価　図 4 はセル数と演算速度倍率の関係を示したものであり、比較の対象は SCG 法部分のみとしている。この図から、長方形水路内の単純なポテンシャル流れ解析では、連立一次方程式の未知数の増加に伴う並列計算効率の向上を確認できる。これより、3 次元解析のように未知数が増加した場合に、並列計算が威力を発揮するものと考えられる。

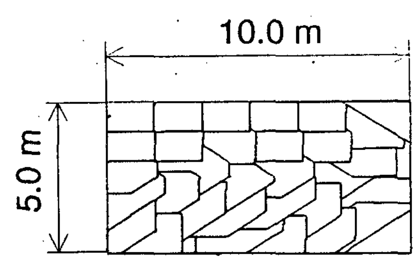
6. おわりに

本報告では、E-by-E SCG 法を用いて連立一次方程式の陰的並列計算の効率的解法の構築に関する検討を行った。その結果、未知数の増加に伴い並列計算効率の向上が確認できた。今後は任意形状、非線形問題における並列計算の有効性を検討したい。

謝辞： 本研究を行うにあたり、並列計算機 AP1000 を使用させて下さった富士通並列処理計算センターに厚く感謝いたします。

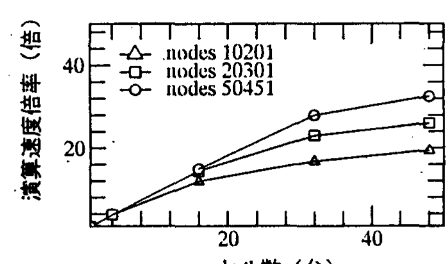
表 1

	セル 1	セル 2
セル境界上節点データ	4, 5, 6	−



節点数　50451　　　セル数　32 台

図 3： 水路モデルに対する領域分割図



$$\text{演算速度倍率} = \frac{1\,\text{セル時の計算時間}}{N\,\text{セル時の計算時間}}$$

図 4： セル数と演算速度倍率の関係

参考文献

[1] 斉藤克矢・樫山和男,"非構造格子に基づく浅水長波流れの並列計算", 土木学会 第 50 回 年次学術講演会講演概要集,pp446-447,1995

[2] 戸川隼人," 共役勾配法", 教育出版,1977

[3] 水上　昭, " Element-by-Element PCG 法のベクトル化と流れ解析への応用", 第 2 回計算力学シンポジウム 報文集,pp1-6,1988

[4] Farhat,C.,"A simple and efficient automatic FEM domain decomposer", *Computers & structurs*,28(1988),pp576-602