(I －13) 繰り返し荷重下における有限変位弾塑性ひずみ履歴挙動の効率的解析に関する研究

中央大学　学員　○宇尾　朋之
中央大学　正員　樫山　和男

1. はじめに

本報告は増分理論に基づく有限変位弾塑性解析において計算時間と計算容量に関する効率的な計算手法について検討したものである。数値解析例として平板の弾塑性履歴挙動解析を行い、連立一次方程式の解法 、増分法（r(min)）法における降伏判定係数、要素サイズの影響について検討を行った。

2. 基礎方程式

つり合い条件式

updated Lagrange method を用いる場合の、ある時刻での速度系のつり合い条件式は以下のように示される。

$$\frac{\partial \dot{\Pi}_{ij}}{\partial x_i} + \rho \dot{b}_j = 0 \qquad (1)$$

ここに、ρは物体の密度、$\bar{b}$は物体力速度である。

ひずみ・変位関係式

Lagrange 表示の Green のひずみ karman の仮定を導入すれば次式のようにひずみ変位の関係式が得られる。

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right] - z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned} \qquad (2)$$

ここに、u, v, w　は x, y, z方向の変位である。

応力・ひずみ関係式

弾塑性応力ーひずみ関係式は弾塑性ひずみ速度の関係を用いて以下の式で示される。

$$D_{ij} = D^p_{ij} + \dot{\varepsilon^e}_{ij}$$

よって

$$\tau^{\circ}_{ij} = C^{ep}_{ijkl} D_{kl}$$

$$C^{ep}_{ijkl} = 2G[\delta_{ik}\delta_{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl} - \frac{9G\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}}{2\bar{\sigma}^2(H' + 3G)}] \qquad (3)$$

ここに、$\dot{\varepsilon^e}$: ひずみ速度,$\bar{\sigma}^2$: 相当応力,H' : 加工硬化率である。なお、降伏関数には、Mises の降伏条件を用いている。

3. 有限要素法

基礎方程式に関する仮想仕事の原理式を作成する。基礎方程式の両辺に仮想変位をかけ、解析領域で積分すると次式を得る。

$$\int_v \dot{\Pi}_{ji}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dV = \int_s \bar{\dot{t}}_i v_i dS + \int_v \rho \bar{\dot{b}}_i v_i dV \qquad (4)$$

そして上式に対し、ガウスの発散定理を用いて整理を行うと最終的に以下の仮想仕事の原理式を得る。

$$\int [(\dot{\tau}_{ij} - 2\sigma_{ik}D_{kj})\delta D_{ij} + \sigma_{jk}L_{ik}\delta L_{ij}]dV = \int_s \bar{\dot{\tau}}_i \delta v_i dS + \int_v \rho \bar{\dot{b}}_i \delta v_i dV \qquad (5)$$

なお、各係数は以下に示す通りである。

$$\delta L = \frac{\partial \delta v}{\partial x} \qquad \delta D = \frac{1}{2}(\delta L + \delta L^T) \qquad (6)$$

ここに、D:変形速度、L:速度勾配である。

仮想仕事の原理式と弾塑性構成式より以下の有限要素方程式が得られる。

$$\int_{ve}([B]^T([C^{ep}] - [F])[B] + [E]^T[G][E])dVdu = \int_{ve}[N]^T dbdV + \int_{se}[N]^T dtdS \qquad (7)$$

ここに $[C]$ は材料的非線形項、$[F], [G]$ は、幾何学的非線形項を示している。

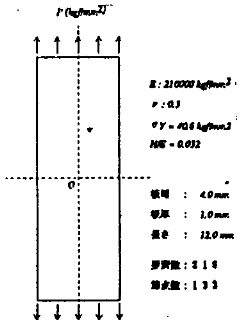
有限要素方程式の解法としては、Skyline 法と Element by Element SCG 法を用いて検討を行う。Element by Element SCG 法の特徴としては、要素行列のみを用いて共役勾配法の前処理を行うところにある。またプログラムが比較的簡易である。この手法により、従来構造解析において問題となっていた計算容量の大幅な軽減が期待できる。また増分法には、$r(min)$ 法を用いた。この手法は各増分段階において要素を一つずつ降伏させるため、計算時間がかかるが精度の良い結果が得られる。

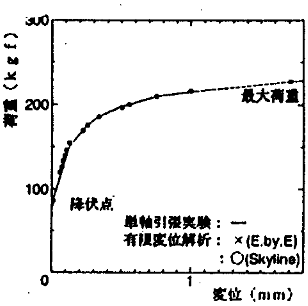
4. 数値解析例

解析例 1:単軸引張問題

本手法の精度を確認するため平板の単軸引張問題を行う。対称性を利用して 1/4 を取り出して解析を行い既存の実験結果との比較を行った。本解析においての解析例、計算条件は図－1 に示した。

図－2 は、総荷重と軸方向変位との関係を示したものであり、実線が実験結果を示し、×は Element by Element SCG 法、○は Skyline 法による計算結果を示している。ここで、2 つの手法の計算結果は完全に一致した。また、実験における結果と計算結果は良い一致をしている。

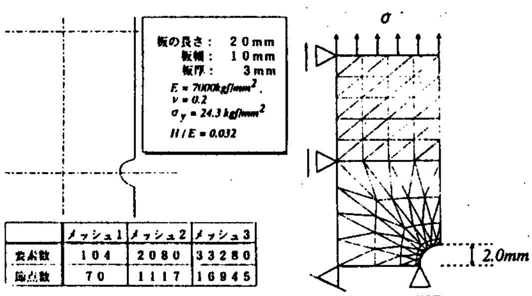




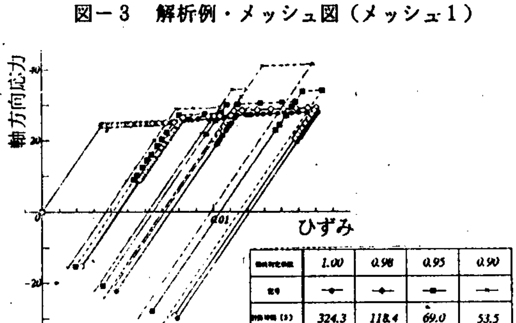
図－1　解析例　　図－2　計算結果（荷重－変位曲線）

解析例 2:平板切り欠き解析

次に平板の繰り返し荷重におけるひずみ履歴の検討を行う。ここで切欠きをもつ平板の解析を行った。解析領域は無限領域として扱える部材の一部を取り出して解析を行う。解析例、計算条件は図－3に示すとおりである。なお、計算には3種類のメッシュを用いて、計算精度、計算時間、計算容量の比較を行った。



図－3　解析例・メッシュ図（メッシュ1）



図－4　計算結果（応力－ひずみ曲線）

図－4は、4種類の降伏判定係数によって計算された最大ひずみ要素（円孔近傍）に関してのひずみ履歴の結果であり、図中の計算時間はメッシュ2による結果を示している。なお、計算にはメッシュ2とメッシュ3を用いている。ここで降伏判定係数とは1.0の場合、降伏に関しての誤差がないので最も良い結果となる。図－4から、降伏判定係数が1.0に近いほど解析時間は多く必要となり、また1.0から離れると解の精度が下がっていくことが分かる。なお、降伏判定係数以外の条件はすべて同じものを用いており、すべて3回の繰り返し荷重を加えたものである。またメッシュ2とメッシュ3の計算結果は完全に一致している。

		メッシュ1	メッシュ2	メッシュ3
E.by.E SCG	計算時間	*3.5(s)*	*258.5(s)*	*24043(s)*
	計算容量	*1.16(MB)*	*2.98(MB)*	*18.6(MB)*
Skyline	計算時間	*3.2(s)*	*350.4(s)*	—
	計算容量	*2.74(MB)*	*25.8(MB)*	*98.7(MB)*

図－5　計算時間と計算容量の比較

図－5は、3種類のメッシュにおける計算時間と、計算容量の比較をしたものである。メッシュサイズが小さくなるに従って、どちらの手法も計算容量、解析時間が増大していくことが確認される。また、Skyline法ではメッシュサイズが大きい場合には、Element by Element　SCG法と比べて計算容量の差異がみられていないが,小さくなるに従って計算容量が非常に多くかかることが分かる。なお、Skyline法ではメッシュサイズが一番小さいメッシュ3においては、計算容量が大きいため解析不可能であった。

8. 結論

1、Skyline法とElement.by.Element SCG法では計算時間に関しては、大きな差は見られないが、プログラムの簡易さ、計算容量を考えると、Element by Element,SCG法が優位と考えられる。

2、R(min)法における降伏判定係数は1.0に近いほど精度の良い結果が得られる。従来0.95以上の値が用いられることが多かったが、本解析結果においては、計算時間、解の精度を考えると0.98程度が妥当である。

今後の課題

今後の課題として、他の計算手法での比較。三次元計算での効率的解法の検討等に取り組む予定である。

参考文献

1, 日本塑性加工学会　：非線形有限要素法,1994
2, 三好俊郎　：有限要素法（構造要素の変形・破壊挙動の解析）,1976
3, 橋口公一　：最新弾塑性学,1990
4, 日本塑性加工学会　：材料加工の計算力学,1992
5, 日本材料学会　：材料学会論文集,1976-1995
6, 山田嘉昭　：コンピューターによる構造工学講座
2-2-A　塑性・粘弾性,1972