

(1-12) 感度解析による弾性平面ひずみ問題の逆解析

東洋大学 学生会員○高野 和則

東洋大学 正会員 新延 泰生
(株)大東設計コンサルタント 正会員 榎本 覚雄

1. はじめに

感度解析は、任意の解析変数の単位変動に対する構造物の応答の変動（感度係数）を解析的に求めるものである。感度解析手法によれば、構造物の既知の応答量をもとに、構造物の未知の剛性を推定することが可能である。

本研究は、弾性連続体の感度解析理論を述べると共に、感度解析手法を用いた最小自乗法にもとづく剛性の推定方法を弾性平面ひずみ地層モデルに適用し、その信頼性を検討している。また、通常よく用いられる Gauss-Newton 法との比較も合わせて行った。

2. 感度解析手法

2-1 弾性連続体の感度解析

二次元弾性連続体の変位法による釣り合い方程式（状態方程式）は、次式で与えられる。

$$[k]\{v\} = \{R\} - \{F\}_p + \{F\}_b + \{F\}_{e0} + \{F\}_{e0} \quad (1)$$

[k]: 剛性マトリックス {F}_p: 連続体に作用する単位面積当たりの分布外荷重
{v}: 変位ベクトル {F}_{e0}: 初期ひずみによる節点力
{R}: 荷重ベクトル {F}_b: 初期応力によって生じる節点力ベクトル
{F}_e: 連続体の物体力と等価な節点力

式(1)の右辺は荷重ベクトルのみを考え、両辺の第一変分をとると次式となる。

$$[k] \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial X_s} \right\} = [H] = - \left[\frac{\partial k}{\partial X_s} \right] \{v\} \quad (2)$$

式(2)の左辺の $\{\partial v_i / \partial X_s\}$ が i 要素の解析変数 X_s の微小変動に対する各変位の変動量を示すものであり、 i 要素の解析変数 X_s に対する各変位の感度係数を示している。

2-2 感度解析手法による剛性推定方法（方法1）

M 層の異なる地層の未知の剛性 X_s を求める。既知な変位量 $\bar{v}_j$ は上層の測定点とする。剛性や測定変位等の初期条件を与えた状態で感度を求め、得られた各要素の測定点に関する感度を層ごとに加算する。

$$\frac{\partial v_i}{\partial X_s} = \sum_{j=1}^M \frac{\partial v_i}{\partial X_s} \cdot \frac{\partial v_j}{\partial X_s} = \sum_{j=1}^M \frac{\partial v_i}{\partial X_s} \cdot \frac{\partial v_j}{\partial X_s} = \sum_{j=1}^M \frac{\partial v_i}{\partial X_s} \cdot \frac{\partial v_j}{\partial X_s} \quad (3)$$

感度係数特性¹⁾より次式が得られる。

$$v_j = - \sum_{s=1}^M \frac{\partial v_j}{\partial X_s} X_s \quad s=1, 2, \dots, M \quad (4)$$

最小自乗法にもとづき、剛性 X_s を求めるための連立方程式をつくる。

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M (\bar{v}_j - v_j)^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M \left(\bar{v}_j + \sum_{s=1}^M \frac{\partial v_j}{\partial X_s} X_s \right)^2 \quad (5)$$

式(5)をもとに方程式を解き、剛性 X_s を求める。

$$\frac{\partial Q}{\partial X_s} = \sum_{j=1}^M \left(\bar{v}_j + \sum_{s=1}^M \frac{\partial v_j}{\partial X_s} X_s \right) \left(\frac{\partial v_j}{\partial X_s} \right) = 0 \quad (6)$$

収束条件を以下の様に設定し、収束判定を行う。

$$\left| \frac{X_s^{(k)} - X_s^{(k-1)}}{X_s^{(k)}} \right| \leq \varepsilon \quad (7)$$

収束条件を満足しない場合は、解析で得られた剛性 X_s を以下に示す方法により補正し、新たな解析変数として再解析する。

$$X_s = X_{os} \frac{X_{os}}{X_s} \quad (8)$$

2-3 Gauss-Newton 法に基づく方法（方法2）

v_j に対応する測定変位を $\bar{v}_j$ とし、測定変位に含まれる誤差を ε とすると

$$\bar{v}_j = v_j + \sum_{s=1}^M \frac{\partial v_j}{\partial X_s} \Delta X_s + \varepsilon \quad (9)$$

最小自乗法にもとづき、 ΔX_s を求めるための連立方程式をつくる。

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M \left(\bar{v}_j - v_j - \sum_{s=1}^M \frac{\partial v_j}{\partial X_s} \Delta X_s \right)^2 \quad (10)$$

Q を最小にするには $\frac{\partial Q}{\partial X_s} = 0$ になればよい。

$$\frac{\partial Q}{\partial X_s} = \sum_{j=1}^M \left(\bar{v}_j - v_j - \sum_{s=1}^M \frac{\partial v_j}{\partial X_s} \Delta X_s \right) \left(- \frac{\partial v_j}{\partial X_s} \right) = 0 \quad (11)$$

これを整理すると

$$\sum_{j=1}^M \left(\sum_{s=1}^M \frac{\partial v_j}{\partial X_s} \frac{\partial v_j}{\partial X_s} \right) \Delta X_s = \sum_{j=1}^M (\bar{v}_j - v_j) \frac{\partial v_j}{\partial X_s} \quad (12)$$

上式より ΔX_s を求め、再解析を行う際新たに解析変数として代入する剛性の値は次式とし、収束判定は式(7)とする。

$$X_s = X_{os} + \Delta X_{os} \quad (13)$$

2-4 推定値の信頼性

収束した推定値は、与える測定データの精度に影響を受けるため測定データの信頼性に対応した推定値の信頼性を考える。収束した時点での式(6)の右辺の $\bar{v}_j$ に単位値を与えて方程式を解けば各測定変位 $\bar{v}_j (j=1, 2, \dots, l)$ の単位変動に対する推定値の変動 $\partial X_i / \partial \bar{v}_j$ が近似的に得られる。

$$\sum_{j=1}^l \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial X_i} \frac{\partial v_i}{\partial X_i} \right) \frac{\partial X_i}{\partial \bar{v}_j} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{v}_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial X_i} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{v}_j} = \begin{cases} 1 & (j=p) \\ 0 & (j \neq p) \end{cases}$$

式(14)より得られる $\partial X_i / \partial \bar{v}_j$ に測定変位 $\bar{v}_j$ を掛け、 X_i で除すれば推定値の信頼性の指標となる無次元化された値が得られる。

$$C = \frac{\partial X_i}{\partial \bar{v}_j} \frac{\bar{v}_j}{X_i} \quad (15)$$

3. 解析例 (地層モデル)

図1に示すような3層の異なるヤング係数(上層部: 1000tf/m²、中層部: 1500tf/m²、下層部: 2000tf/m²)を持つ39節点48要素の平面歪み問題に対して、表層部の節点5に集中鉛直荷重 $P=2.000\text{tf}$ を載荷したモデルを考える。既知数となる測定変位は、上記のヤング係数で通常の構造解析を行い設定する。設定された測定変位を既知数として未知数となる各層のヤング係数を逆解析により同定する。地層のポアソン比 ν は0.48とする。なお、収束条件は $\epsilon=0.01$ とする。

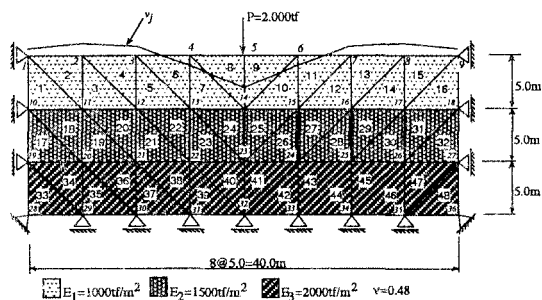


図1 地層モデル

初期設定のヤング率を-90%から+90%変動させ、それぞれについて測定変位を-20%から+20%変動させて解析を行った。図2と図3からヤング率初期設定の誤差が少ないときは方法1と2の差はほとんどみられないが、誤差の多いときは方法1を用いた方がより早く正確な推定値が得られることがわかる。次に、測

定変位が誤差を持つ場合の推定結果に与える影響を表1, 2に示す。ここでは初期設定のヤング率を+70%、各測定点に-1%の誤差を与えた場合を考えている。表1は正解値に対する推定誤差を示したものであり、表2は、式(15)で得られる推定値の信頼性を各測定点毎に示したものである。(表1、表2共に方法1で解析したものである。)この信頼値に測定データの誤差を掛けたものが、推定されたヤング率の持つ誤差を表している。例えば測定点5に-1%の誤差が与えられれば、推定された上層部のヤング率の誤差は

$$C \times (-0.01) = -1.43 \times (-0.01) = 0.0143 (1.43\%) \approx 1.46\%$$

となり、表1に示した推定誤差にはほぼ一致する。

表1 測定位置と推定精度の関係

測定点	1	2	3	4	5
上層部	-0.04	-0.08	-0.08	-0.25	1.46
中層部	-0.24	0.30	1.12	0.78	-0.94
下層部	0.93	0.12	-2.11	-0.11	2.22

表2 推定値の信頼性

測定点	1	2	3	4	5
上層部	-0.04	-0.08	-0.07	-0.25	1.43
中層部	-0.24	0.30	1.10	0.76	-0.94
下層部	0.91	0.12	-2.13	-0.11	2.15

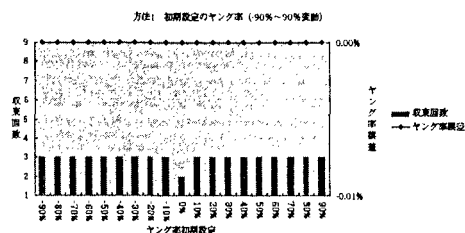


図2 方法1におけるヤング率の初期設定値と収束回数の関係

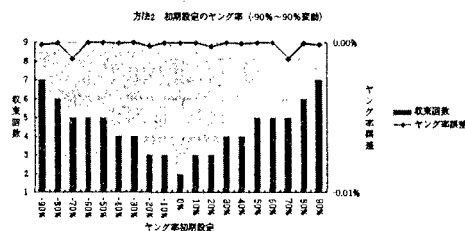


図3 方法2におけるヤング率の初期設定値と収束回数の関係

4. おわりに

感度解析手法を用いた最小自乗法に基づく剛性の推定方法を示した。この方法(方法1)はGauss-Newton法に比較して定式化の過程で数学的近似を含んでいない。今後は解析の精度を向上させるために解析変数の逆数で定式化を行い、検討を行う予定である。

(参考文献)

- 1) 新延、松井、菊田：骨組構造物の応答感度係数の特性、土木学会論文集、1992.7
- 2) 小室、新延、榎本：弾性平面ひずみモデルにおける逆解析問題、土木学会年次学術講演会要集、I-417、1994.9