

(I - 9) Ritz vector に基づくマトリックス縮小法を用いた構造同定

東京電機大学 学生員 安部芳久

東京電機大学 正会員 松井邦人

1. はじめに

本研究では、舗装構造における未知パラメータ（ここでは、減衰係数・弾性係数）を動的データを用いて同定する問題を対象としている。一般にこのような問題を扱うとき、質量・減衰・剛性の各マトリックスは有限要素法を用いて作成され、舗装構造全体の運動方程式は非常に大きくなる。よって、これを直接解くことは必ずしも効率的ではない。そこで本研究では、リッツベクトルを用いてマトリックスを縮小し、次元を落とした運動方程式・感度方程式を作成して構造同定を行い、マトリックスの縮小度に関して検討した。

2. リッツベクトルの適応及び作成

舗装全体の運動方程式は、式 (1) のようになる。

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{f\}g(t) \quad (1)$$

ここで、 $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ は $N \times N$ のマトリックス、 $\{\ddot{u}\}$ 、 $\{\dot{u}\}$ 、 $\{u\}$ は $N \times 1$ のベクトルである。そして、

$$\{\ddot{u}\} = [X]\{\ddot{v}\}, \{\dot{u}\} = [X]\{\dot{v}\}, \{u\} = [X]\{v\} \quad (2)$$

とおく。ここで、 X は L 個のリッツベクトルからなる $N \times L$ のマトリックス。また、 $\{\ddot{v}\}$ 、 $\{\dot{v}\}$ 、 $\{v\}$ は $L \times 1$ のベクトルとなる。式 (2) を式 (1) に代入して、 $[X]^T$ を左から掛けると、

$$[M^*]\{\ddot{v}\} + [C^*]\{\dot{v}\} + [K^*]\{v\} = \{f^*\}g(t) \quad (3)$$

$$\text{ここに、} [M^*] = [X]^T [M] [X] \quad (4)$$

$$[C^*] = [X]^T [C] [X] \quad (5)$$

$$[K^*] = [X]^T [K] [X] \quad (6)$$

$$\{f^*\} = [X]^T \{f\} \quad (7)$$

式 (3) を解いて、 $\{\ddot{v}\}$ 、 $\{\dot{v}\}$ 、 $\{v\}$ を求め、そして式 (2) より、全体構造の各節点における $\{\ddot{u}\}$ 、 $\{\dot{u}\}$ 、 $\{u\}$ が計算できる。

リッツベクトル $[X] = \{X_1, X_2, \dots, X_L\}$ は以下のように作成される。

まず、

$$[K]\{X_1\} = \{f\} \quad (8)$$

を $\{X_1\}$ について解く。そして、

$$\{X_1\} = \alpha_1 \{X_1\} \quad (9)$$

とにおいて、 $\{X_1\}^T [M] \{X_1\} = 1$ となるように α_1 を設定す

る。すなわち、

$$\alpha_1 = \sqrt{1 / \{X_1\}^T [M] \{X_1\}} \quad (10)$$

上式より、 α_1 が決まれば、式 (9) より $\{X_1\}$ が求まる。残りの $\{X_i\}$ は、

$$[K]\{X_i^*\} = [M]\{X_{i-1}\} \quad (11)$$

$$\{X_i\} = \{X_i^*\} - \sum_{j=1}^{i-1} \beta_j \{X_j\} \quad (12)$$

$$\{X_i\} = \alpha_i \{X_i\} \quad (13)$$

として求まる。また、式 (12) の β_j は、リッツベクトルの直交性 ($\{X_j\}^T [M] \{X_i\} = 0$ 、 $j = 1, \dots, i-1$) より、

$$\beta_j = \{X_j\}^T [M] \{X_i^*\} \quad (j = 1, \dots, i-1) \quad (14)$$

さらに、式 (13) の α_i は、

$$\alpha_i = \sqrt{1 / \{X_i\}^T [M] \{X_i\}} \quad (15)$$

である。

3. 動的応答解析

図-1のような4層からなる舗装断面において、表面にFWD試験の荷重を想定し、 $g(t) = P \sin^2(\pi t / t_p)$ (P : 載荷振幅 5000 kgf、 t_p : 載荷作用時間 0.04 sec) の動的な荷重を作用させた。

解析では、図-1を軸対称有限要素法でモデル化し、解析手法にはNewmark β 法を用いた。また、着目する表面たわみの位置は、0、15、45、90、150cmの5点としている。図-2に動的な荷重、質量、減衰、剛性マトリックスをフルマトリックス (自由度 503) で解析した表面たわみを示す。

4. 応答によるマトリックス縮小度の検討

フルマトリックス (503*503) の解析から計算精度を低減することなく、どこまでマトリックスを縮小することができるかを確認するため、まず応答を比較することで検討を行った。応答の誤差を計算し、誤差が著しく大きくなる過程を図-3に示す。

このとき、誤差とは以下のように設定した。

$$E_{1j} = \sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_{0ij} - x_{1j})^2 / \sum_{i=1}^5 x_{0ij}^2} \quad (16)$$

$$E_2 = \sum_{j=1}^5 E_{1j} \quad (17)$$

このとき、 n : データ数、 $j = 1 \sim 5$ (たわみ着目点)

X_{0ij} : フルマトリックスで解析した j 点でのたわみ

X_{ij} : 縮小したマトリックスで解析した j 点でのたわみ

5. 構造同定によるマトリックス縮小度の検討

4では応答たわみに着目してマトリックスの縮小度を検討した。しかし、一般に構造同定では観測データにより未知パラメータの推定値が大きくばらついてしまうことが知られている。よって、マトリックスの縮小度を応答たわみだけで検討することは不十分である。このようなことから5では構造同定により得られる推定値に着目して、マトリックスの縮小度を検討する。構造同定には Gauss - Newton 法を用い、フルマトリックスで解析した応答たわみを観測たわみとして用いている。

評価関数の最も小さい推定値を収束値として収束誤差を計算し、縮小自由度と収束誤差の関係を図-4、5に示す。

このとき、誤差とは以下のように設定した。

$$E_i = (X_i / X_{0i} - 1) \times 100 \quad (\%) \quad (18)$$

X_i : 収束値、 X_{0i} : 真値、 $i = 1 \sim 8$ (未知パラメータの数)

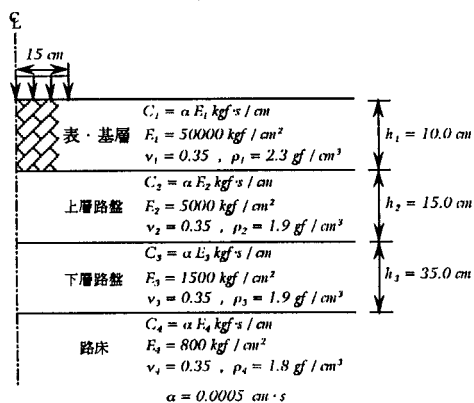


図-1 舗装構造

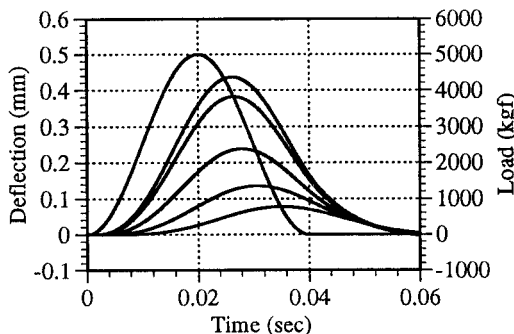


図-2 荷重と表面たわみ

6. おわりに

本研究では、リッツベクトルを用いたマトリックスの縮小数を、応答解析、構造同定の2つの視点から検討を行った。結果として、応答だけでみればかなりマトリックスを縮小しても精度良く解析できる。また、構造同定においては自由度25が縮小の限界ではないかと判断できる。

しかし、限界縮小数に関しては対象とするモデルにより異なることが予想されるため、そのつど何らかの検討が必要であると思われる。

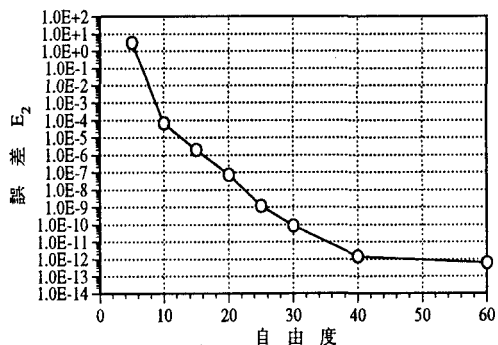


図-3 マトリックスの自由度と誤差の関係 E_2

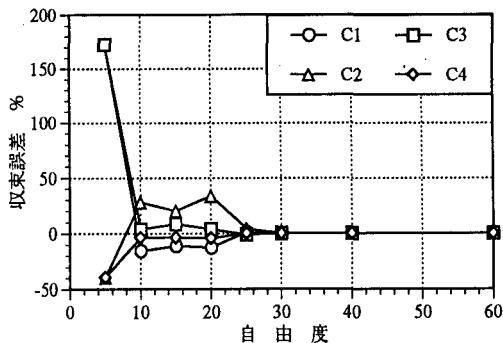


図-4 マトリックスの自由度と収束誤差の関係 (減衰係数)

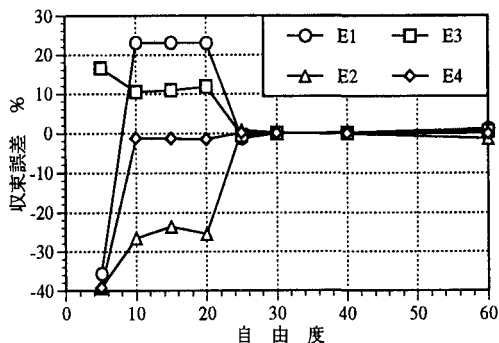


図-5 マトリックスの自由度と収束誤差の関係 (弾性係数)