

(I-8) ケーブル固定部の振動曲げ応力

関東学院大学大学院 ○学生会員 高野 覚
 関東学院大学 杉谷 優
 関東学院大学 正会員 倉西 茂

1. はじめに

近年、ケーブル部材を使用したケーブル構造が数多く建設されているが、ケーブル部材は風等により振動が起き易い。一般にケーブル両端は固定されているので、端部では曲げ応力が大きくなる。本研究の目的は、振動に関するパラメーターを無次元化し、端部に生じる曲率を示す図を提示する。

2. 解析方法

直線ケーブルの振動方程式は、張力が作用したはりの振動式を用いることができる。これを解き、境界での固定の条件を入れると、その振動モードが決まる。この振動モードより曲率、曲げモーメント、曲げ応力が求まることになる。

2. 1. 振動方程式

はりの振動には、回転慣性やせん断変形の影響も考慮しなければならないが、ここでは曲げモーメントによる曲げ振動だけを考える。張力 (T) が作用した場合の梁の曲げ振動の基礎微分方程式は、次式で表される。

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (2-1)$$

この微分方程式の一般解は、

$$f(x) = C_1 \cosh \alpha x + C_2 \sinh \alpha x + C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x \quad (2-2)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{T + \sqrt{T^2 + 4EI m \omega^2}}{2EI}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{-T + \sqrt{T^2 + 4EI m \omega^2}}{2EI}} \quad (2-3)$$

ω : 円振動数、 m : 単位長重量

で与えられて、両端固定はりの座屈荷重 (T_E)、曲げ剛性を無視した弦の円振動数 (ω_T) を用いて整理すると、

$$T_E = \frac{4\pi^2 EI}{\ell^2}, \quad \omega_T = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{T}{m}} \quad (2-4)$$

$$\alpha \ell = \pi \sqrt{\frac{T}{T_E}} \sqrt{2 + 2 \sqrt{1 + \frac{T_E}{T} \left(\frac{\omega}{\omega_T}\right)^2}}, \quad \beta \ell = \pi \sqrt{\frac{T}{T_E}} \sqrt{-2 + 2 \sqrt{1 + \frac{T_E}{T} \left(\frac{\omega}{\omega_T}\right)^2}} \quad (2-5)$$

ℓ : ケーブル長

で表される。一般解の任意定数 ($C_1 \sim C_4$) を決定するために、両端固定梁の境界条件 $f(0) = 0$ 、 $f(\ell) = 0$ 、 $f'(0) = 0$ 、 $f'(\ell) = 0$ の4つを代入し整理すると、振動数方程式は次式で表される。

$$2\alpha\beta(1 - \cosh \alpha \ell \cos \beta \ell) + (\alpha^2 - \beta^2) \sinh \alpha \ell \sin \beta \ell = 0 \quad (2-6)$$

2. 2. 固有振動数の逐次近似法

この振動方程式において、両辺を $\cosh \alpha \ell$ で割ると

$$2\alpha\beta \left(\frac{1}{\cosh \alpha \ell} - \cos \beta \ell \right) + (\alpha^2 - \beta^2) (\tan \alpha \ell \sin \beta \ell) = 0 \quad (2-7)$$

となる。 $1/\cosh \alpha l \approx 0$ 、 $\tanh \alpha l \approx 1$ として近似させて、整理すると

$$-2\alpha\beta + (\alpha^2 - \beta^2)\tan\beta l = 0 \quad (2-8)$$

(2-5) 式の βl において、 $T_s/T = \Delta$ と置く、また $(\omega/\omega_T)^2$ は 1 に近いので、

$$\beta l = \pi \left(\frac{\omega_T + \Delta \omega}{\omega_T} \right) \quad \text{と置くことができる。} \quad \Delta \omega / \omega_T = \varepsilon \text{ は小さい量とすると、}$$

$$\beta l = \pi(1 + \varepsilon) \quad (2-9)$$

となる。(2-8) 式を整理すると、

$$\tan\beta l = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2} \quad (2-10)$$

が得られる。(2-9) 式より $\beta l = \pi$ 付近と予想されるので、 $\beta l = \pi$ を (2-10) 式に代入し ε の過不足を予想しながら、 ω を変えて成り立つまで繰り返し計算をする。この ω の値と無次元化した (2-5) 式より、 α 、 β を求める。

2. 3. 固有振動形 (モード) と曲率、曲げ応力

(2-2) 式の $C_2 \sim C_4$ に 4 つの境界条件 $f(0) = 0$ 、 $f(l) = 0$ 、 $f'(0) = 0$ 、 $f'(l) = 0$ をあてはめて C_1 で表すと次式になる。

$$f(x) = C_1 \left(\cosh \alpha l \frac{x}{l} - \sinh \alpha l \frac{x}{l} - \cos \beta l \frac{x}{l} + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta l \frac{x}{l} \right) \quad (2-11)$$

(2-11) 式が示す波形が、固有振動形 (モード) である。(2-11) 式を x で 2 回微分し、両辺を無次元化すると、次式で表される。

$$f''(x) = \frac{C_1}{l} \left(\alpha^2 l^2 \cosh \alpha l \frac{x}{l} - \alpha^2 l^2 \sinh \alpha l \frac{x}{l} + \beta^2 l^2 \cos \beta l \frac{x}{l} - \alpha l \beta \sin \beta l \frac{x}{l} \right) \quad (2-12)$$

(2-12) 式の $f''(x)$ がケーブルの曲率となる。曲げモーメントは、この曲率と曲げ剛性との積で求められる。曲げモーメントとケーブル断面の半径 (r) より曲げ応力は与えられる。

2. 4. 解析モデル

解析にあたって使用した諸量を後に記す。弾性係数 (E) 200 GN/m^2 、断面二次モーメント

(I) $11.5 \mu \text{ m}^4$ 、ケーブル長 (l) 450 m 、張力 (T) 18.5 MN 、単位長重量 (m) 100 N/m

3. 解析結果

α 、 β を無次元にしたときのケーブル長と曲率の関係を図-1 に記す。曲率は、ケーブル長 l が端部において最大値をとり、その他の位置では、最大値に比べ小さな値をとる。曲げモーメントと曲げ応力は、この曲率より求められるので、同じ様に端部において最大値をとる。

4. まとめ

両端固定のケーブルにおいて、ケーブル長 l の $6.6 \times 10^{-3} l$ から 0 で曲率がかなり大きくなることがわかった。このことは、斜張橋、ニールセン橋等のケーブル構造物の寿命に大きく影響することになるであろう。

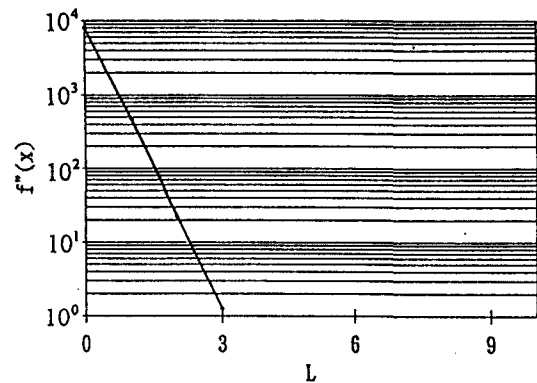


図-1 ケーブル長と曲率の関係