

(I-7) 軸力と曲げを受ける積層はりの簡易解析法に関する研究

早稲田大学理工学部 学生員 谷口 望

早稲田大学理工学部 正 員 依田照彦

1. はじめに 近年、土木工学分野においても積層構造を持つはりが利用されるようになってきた。しかしながら、それらに対する構造解析は必ずしも容易ではない¹⁾。本文では、軸力と曲げを受ける積層はりに対する簡易解析法を提案する。解析では、図1のような座標系において高さ h 、長さ l の N 層に分割されたはりを考え、様々な材料で構成された積層はりを微小層に分割し、変位・応力を線形近似する。また、各層内において材料は等方等質とし、変位はいずれも微小とする。

2. 曲げ問題の解析 両辺単純支持のはりに、鉛直荷重 $q(x)=Q\sin(\pi/l)x$ がはりの任意の高さ($h=hp$)に作用する場合を考える。本解析では変位・応力を次のように仮定する。

$$u_{xi} = b_i w^{(1)}, \quad u_{zi} = d_i w$$

$$\tau_{xzi} = c_i w^{(3)}, \quad \sigma_{zzi} = f_i w^{(2)} \quad (1a, b, c, d)$$

ここに、 u_{xi} , u_{zi} : i 層下面における水平方向変位および鉛直方向変位

τ_{xzi} , σ_{zzi} : i 層下面におけるせん断応力および垂直応力

w : x のみの関数($=w_0 \sin(\pi/l)x$, w_0 : 定数)

$w^{(n)}$: w の x 方向 n 階微分。

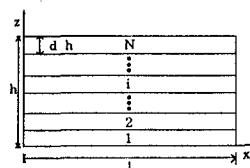


図1. 積層はりモデル

式(1)を応力～ひずみ関係式・ひずみ～変位関係式・応力の釣り合い式に適用することにより、 i 層下面の変位・応力は $i-1$ 層下面の変位・応力により示される。

次に、はりの上下面での応力に関する境界条件より、 $c_1 = c_{N+1} = f_1 = f_{N+1} = 0$ の4式、さらに外力のする仕事とひずみエネルギーの関係より1式の合計5条件式を用いて、各層の b_i , c_i , d_i , f_i および w_0 を求めることができる。曲げ応力 σ_{xx} は、水平方向変位と垂直応力を用いて表現できる。付言するならば、はりの長さが高さに比べて十分に長い場合には、 $\sigma_{zzi} = 0$, $u_{zi} = \text{const.}$ として一次元的に解析することも可能である。この場合、条件式は、 $c_1 = c_{N+1} = 0$ およびエネルギー条件式の計3式により各層の b_i , c_i , w_0 を求めることになる。ただし、この場合には荷重作用位置の変化を考慮することはできない。

3. 軸力問題の解析 両辺単純支持のはりに、軸方向荷重 $p(x)=P\cos(\pi/l)x$ (X 軸負方向の力を正とする) がはりの任意の高さに作用する場合を考える。変位・応力を次のように仮定する。

$$u_{xi} = b_i' u, \quad u_{zi} = d_i' u^{(1)}, \quad \tau_{xzi} = c_i' u^{(2)}, \quad \sigma_{zzi} = f_i' u^{(3)} \quad (2a, b, c, d)$$

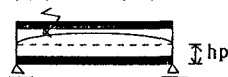
ここに、 u : x のみの関数($=u_0 \cos(\pi/l)x$, u_0 : 定数)。

式(2)を曲げ問題の解析と同様に応力の釣り合い式等に適用して、 i 層下面の変位・応力を $i-1$ 層下面の変位・応力により示す。条件式は曲げ問題の場合と同様に5式となり、各層の変位・応力が決定できる。

4. 数値計算例 はりは、曲げ問題の解析では高さ $h=10\text{cm}$ 、長さ $l=100\text{cm}$ 、分割層数 $N=1000$ 、最大荷重 $Q=1\text{kgf/cm}$ とし、荷重作用位置 hp は h (上面)、 $3h/4$ 、 $h/2$ 、 $h/4$ 、 0 (下面)の5通りに変化させた。軸力問題の解析では最大荷重のみを変えて $P=10\text{kgf/cm}$ とした。また、曲げ問題に用いるはりは 8cm のゴムが 1cm の軟鋼に挟まれた3層はり(図2)を、軸力問題に用いるはりは下部 2cm が軟鋼、上部 8cm がコンクリートの2層はり(図3)を想定し、各材料の弾性定数 E 、ポアソン比 ν を次のようにおく。

コンクリート: $E_c = 3 \times 10^5 (\text{kgf/cm}^2)$; $\nu_c = 0.2$, 軟鋼: $E_s = 2.1 \times 10^6 (\text{kgf/cm}^2)$; $\nu_s = 0.2$, J°A : $E_g = 50 (\text{kgf/cm}^2)$; $\nu_g = 0.5$ 。
曲げ・軸力問題それぞれの解析結果のうち高さ方向の応力分布を、図4～図9に示す。

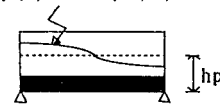
$$q(x) = Q \sin(\pi/l)x$$



軟鋼：ゴム：軟鋼
=0.1h：0.8h：0.1h

図2. 曲げ問題の解析に用いるはりモデル

$$p(x) = P \cos(\pi/l)x$$



コンクリート：軟鋼
=0.8h：0.2h

図3. 軸力問題の解析に用いるはりモデル

凡 例

—— (1) $hp=h$	----- (3) $hp=h/2$	 (5) $hp=0$
..... (2) $hp=3h/4$	----- (4) $hp=h/4$	

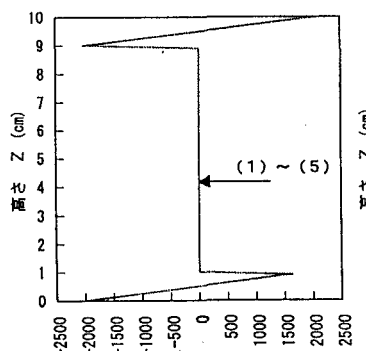
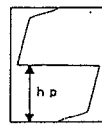


図4. 曲げの曲げ応力 σ_{xx} の高さ方向分布

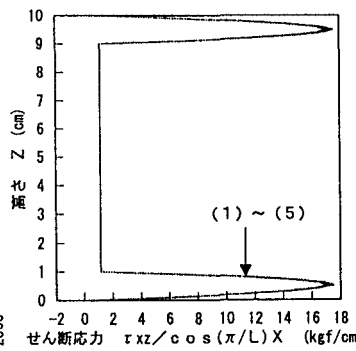


図5. 曲げのせん断応力 τ_{xz} の高さ方向分布

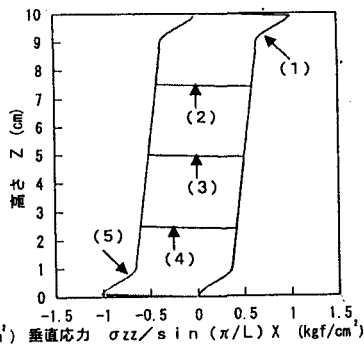


図6. 曲げの垂直応力 σ_{zz} の高さ方向分布

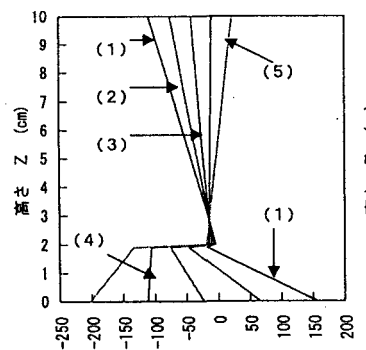


図7. 軸力の曲げ応力 σ_{xx} の高さ方向分布

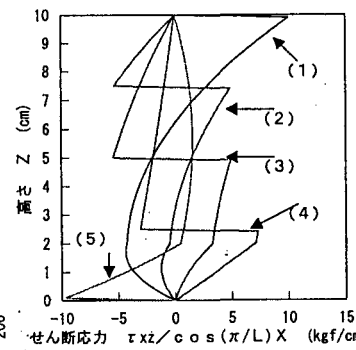


図8. 軸力のせん断応力 τ_{xz} の高さ方向分布

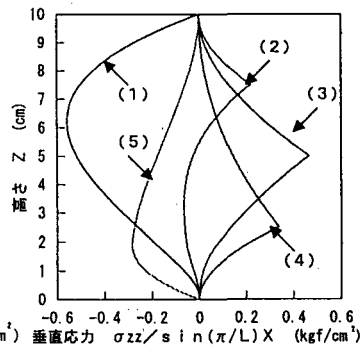


図9. 軸力の垂直応力 σ_{zz} の高さ方向分布

5. まとめ ここで示した積層はりの簡易解析法は、複雑な近似式を用いずに弾性論の基本式がそのまま利用できコンピューターを有効に利用することができるため、理解もし易く簡潔であると考えられる。今回の荷重状態は、曲げ問題では $\sin$ 分布荷重、軸力問題では $\cos$ 分布荷重に限定したが、周期の異なる三角関数等を用いることにより、他の荷重状態に適用することも可能である。なお、本解析法の妥当性については、等質はりについてであるが、文献2)と比較して確認を行った。

6. 参考文献

- 1) 依田他：せん断変形を考慮した積層板の簡易曲げ解析について、土木学会第50回年次学術講演集, 1995.9
- 2) 根岸嘉和：平板・はり・複合構造の静的・動的な精密解析理論に関する総合研究、博士論文, 1993.5