(I − 2)

トラス構造物の形状感度解析

(その2) 部材長を感度変数とする場合

東洋大学　学生員　○早川　恒
東洋大学　正会員　　新延　泰生
東洋大学　学生員・　荻窪　勝宏

1．はじめに

文献1) では感度変数を節点座標とし、形状感度係数・形状感度係数特性を導いた。本研究では、部材長を感度変数とし、形状感度係数・形状感度係数特性を導いた。そして形状感度係数を用いて、部材長を変動させたときの応答の推定を行い、部材長の変動に対する応答変位の線形性を調べた。

2．節点座標による形状感度解析

部材数 m のトラス構造物の節点座標における形状感度係数は式(1)で与えられる[1)]。

$$\frac{\partial z_k}{\partial X_h}=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial z_k}{\partial a_i}\frac{\partial a_i}{\partial X_h}+\frac{\partial z_k}{\partial b_i}\frac{\partial b_i}{\partial X_h}+\frac{\partial z_k}{\partial c_i}\frac{\partial c_i}{\partial X_h}\right) \quad (1)$$

また、節点座標の形状感度係数特性は式(2)のように導かれる[1)]。

$$\sum_{h=1}^{2NN}\frac{\partial z_k}{\partial X_h}X_h=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial z_k}{\partial x_s}x_s+\frac{\partial z_k}{\partial x_e}x_e+\frac{\partial z_k}{\partial y_s}y_s+\frac{\partial z_k}{\partial y_e}y_e\right)$$

$$=z_k \qquad \text{NN : Number of node} \quad (2)$$

3．部材長による形状感度解析

I ）形状感度係数

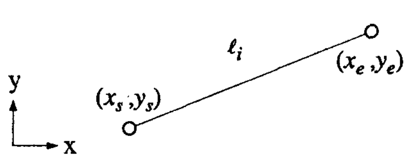

Fig-1

Fig-1 のトラス構造物の任意の要素 i に注目する。部材の始節点の座標は (x_s,y_s)、終節点の座標を (x_e,y_e) とする。ここで部材長 ℓ_i を節点座標で表すと

$$\ell_i^2=(x_e-x_s)^2+(y_e-y_s)^2 \quad (3)$$

となる。式(3)を節点座標でそれぞれ偏微分すると

$$\frac{\partial \ell_i}{\partial x_s}=-\frac{x_e-x_s}{\ell_i}\ ,\quad \frac{\partial \ell_i}{\partial x_e}=\frac{x_e-x_s}{\ell_i}$$

$$\frac{\partial \ell_i}{\partial y_s}=-\frac{y_e-y_s}{\ell_i}\ ,\quad \frac{\partial \ell_i}{\partial y_e}=\frac{y_e-y_s}{\ell_i}$$

となり、それぞれに節点座標を乗じ総和すると

$$\frac{\partial \ell_i}{\partial x_s}x_s+\frac{\partial \ell_i}{\partial x_e}x_e+\frac{\partial \ell_i}{\partial y_s}y_s+\frac{\partial \ell_i}{\partial y_e}y_e=\ell_i \quad (4)$$

となる。この式を用いて以下のように部材長の形状感度係数を求める。

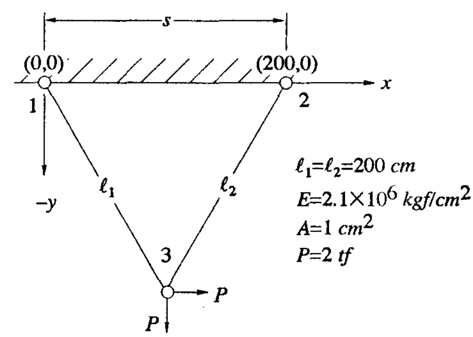

Fig-2　2部材トラス

Fig-2 において、節点1-3の部材長を ℓ_1、節点2-3の部材長を ℓ_2、節点1-2の支点間を s とし、節点座標 x_1, y_1, y_2 は0とする。このとき s, ℓ_1, ℓ_2 を節点座標を用いて表すと

$$s^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=x_2{}^2$$

$$\ell_1{}^2=(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2=x_3{}^2+y_3{}^2$$

$$\ell_2{}^2=(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2=(x_3-x_2)^2+y_3{}^2$$

となり、節点座標でそれぞれ偏微分すると

$$\frac{\partial s}{\partial x_2}x_2=s \quad (5)$$

$$\frac{\partial \ell_1}{\partial x_3}x_3+\frac{\partial \ell_1}{\partial y_3}y_3=\ell_1 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \ell_2}{\partial x_2}x_2+\frac{\partial \ell_2}{\partial x_3}x_3+\frac{\partial \ell_2}{\partial y_3}y_3=\ell_2 \quad (7)$$

となる。

式(2)より節点座標を形状感度変数とするときは

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_2}x_2+\frac{\partial z_k}{\partial x_3}x_3+\frac{\partial z_k}{\partial y_3}y_3=z_k \quad (8)$$

となる。

節点座標 x_2 は s,ℓ_2 の関数、また x_3, y_3 はそれぞれ ℓ_1,ℓ_2 の関数で示されることから、$\partial z_k/\partial x_2$, $\partial z_k/\partial x_3$, $\partial z_k/\partial y_3$ は以下のように表される。

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_2}=\frac{\partial z_k}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x_2}+\frac{\partial z_k}{\partial \ell_2}\frac{\partial \ell_2}{\partial x_2} \tag{9}$$

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_3}=\frac{\partial z_k}{\partial \ell_1}\frac{\partial \ell_1}{\partial x_3}+\frac{\partial z_k}{\partial \ell_2}\frac{\partial \ell_2}{\partial x_3} \tag{10}$$

$$\frac{\partial z_k}{\partial y_3}=\frac{\partial z_k}{\partial \ell_1}\frac{\partial \ell_1}{\partial y_3}+\frac{\partial z_k}{\partial \ell_2}\frac{\partial \ell_2}{\partial y_3} \tag{11}$$

が成立する。式(9)、(10)、(11)をマトリックス表示にすると

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial \ell_2}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial \ell_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \ell_2}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial \ell_1}{\partial y_3} & \frac{\partial \ell_2}{\partial y_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial z_k}{\partial s} \\ \frac{\partial z_k}{\partial \ell_1} \\ \frac{\partial z_k}{\partial \ell_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial z_k}{\partial x_2} \\ \frac{\partial z_k}{\partial x_3} \\ \frac{\partial z_k}{\partial y_3} \end{Bmatrix} \tag{12}$$

となる。式(12)の$\partial z_k/\partial s$, $\partial z_k/\partial \ell_1$, $\partial z_k/\partial \ell_2$が部材長による形状感度係数である。式(12)の左辺のマトリックスは変数変換マトリックスである。

Ⅱ）形状感度係数

式(9)、(10)、(11)の右辺にそれぞれ節点座標を乗じ総和すると

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial z_k}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x_2}+\frac{\partial z_k}{\partial \ell_2}\frac{\partial \ell_2}{\partial x_2}\right)x_2+\left(\frac{\partial z_k}{\partial \ell_1}\frac{\partial \ell_1}{\partial x_3}+\frac{\partial z_k}{\partial \ell_2}\frac{\partial \ell_2}{\partial x_3}\right)x_3 \\
&+\left(\frac{\partial z_k}{\partial \ell_1}\frac{\partial \ell_1}{\partial y_3}+\frac{\partial z_k}{\partial \ell_2}\frac{\partial \ell_2}{\partial y_3}\right)y_3 \\
&=\frac{\partial z_k}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x_2}x_2+\frac{\partial z_k}{\partial \ell_2}\frac{\partial \ell_2}{\partial x_2}x_2+\frac{\partial z_k}{\partial \ell_1}\left(\frac{\partial \ell_1}{\partial x_3}x_3+\frac{\partial \ell_1}{\partial y_3}y_3\right) \\
&\quad+\frac{\partial z_k}{\partial \ell_2}\left(\frac{\partial \ell_2}{\partial x_3}x_3+\frac{\partial \ell_2}{\partial y_3}y_3\right) \\
&=\frac{\partial z_k}{\partial s}s+\frac{\partial z_k}{\partial \ell_2}\frac{\partial \ell_2}{\partial x_2}x_2+\frac{\partial z_k}{\partial \ell_1}\ell_1+\frac{\partial z_k}{\partial \ell_2}\left(\ell_2-\frac{\partial \ell_2}{\partial x_2}x_2\right) \\
&=\frac{\partial z_k}{\partial s}s+\frac{\partial z_k}{\partial \ell_1}\ell_1+\frac{\partial z_k}{\partial \ell_2}\ell_2
\end{aligned} \tag{13}$$

となる。これは部材長の形状感度係数に部材長を乗じ総和したことになる。よって式(8)より

$$\frac{\partial z_k}{\partial s}s+\frac{\partial z_k}{\partial \ell_1}\ell_1+\frac{\partial z_k}{\partial \ell_2}\ell_2=z_k \tag{14}$$

となる。

4．解析例

Fig-2の2部材トラスの部材長による形状感度係数と形状感度係数特性についての計算結果をTable-1に示す。

部材長による形状感度係数を用いた応答の推定方法は、感度変数L_j ($j=1,2,\cdots,q$) (q: 部材数と支点間を足した数)が$L_j'=L_j+\delta L_j$へ微小変動した場合、関数z_k'（応答）は近似的に次のように表される。

$$z_k'=z_k+\sum_{j=1}^{q}\frac{\partial z_k}{\partial L_j}\delta L_j \tag{15}$$

z_kは与えられた感度変数L_jに対する応答を示し、$\partial z_k/\partial L_j$は$L_j$に対する形状感度係数ベクトルである。式(15)よりFig-2の応答の推定を行い、結果をFig-3に示す。このとき、部材長ℓ_2は固定し、部材長ℓ_1を100～300cmまで10cmきざみで水平変位と鉛直変位を求め、形状感度係数の応答に対する線形性を調べた。

Table-1

形状感度係数

$\partial u_3/\partial s=$	-3.80952381E-03	$\partial v_3/\partial s=$	-4.23280423E-04
$\partial u_3/\partial \ell_1=$	2.30728546E-03	$\partial v_3/\partial \ell_1=$	4.44037293E-04
$\partial u_3/\partial \ell_2=$	3.40700026E-03	$\partial v_3/\partial \ell_2=$	-6.55677505E-04

形状感度係数特性

$\partial u_3/\partial s\times s=$	-7.61904762E-01	$\partial v_3/\partial s\times s=$	-8.46560847E-02
$\partial u_3/\partial \ell_1\times \ell_1=$	4.61457092E-01	$\partial v_3/\partial \ell_1\times \ell_1=$	8.88074587E-02
$\partial u_3/\partial \ell_2\times \ell_2=$	6.81400051E-01	$\partial v_3/\partial \ell_2\times \ell_2=$	-1.31135501E-01
$\Sigma=$	**3.80952381E-01**	$\Sigma=$	**-1.26984127E-01**
解析水平変位	**3.80952381E-01**	**解析鉛直変位**	**-1.26984127E-01**

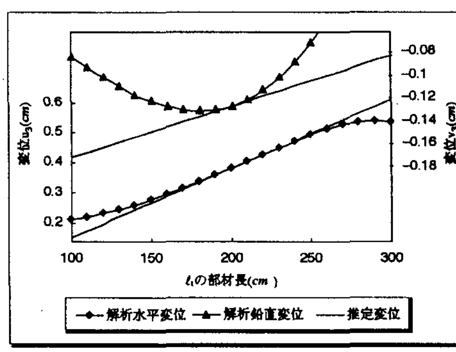

Fig-3　応答の推定

5．おわりに

本研究ではトラス構造物を例に取り、節点座標の形状感度係数を先に求め、それに変数変換マトリックスの逆マトリックスを乗じることにより、部材長による形状感度係数が得られ、部材長の形状感度係数特性を導くことができた。式(12)左辺の変数変換マトリックスは任意のトラス構造物に対しても容易に誘導が可能である。現在、部材長による形状感度解析をもとに形状最適化の問題を検討している。

【参考文献】

1）早川・新延・榎本：トラス構造物の形状感度解析，土木学会年次学術講演会概要集Ⅰ,1995