

1 はじめに

密度流に関する環境問題は数多くあり、その流れを解明することは土木工学の分野においても重要な課題となっている。そこで本報告では、解析領域内の密度を、マーカー粒子の分布により表現する有限要素法を提案し、弱混合型の密度流現象を数値計算により再現することを目的とする。数値解析例として、最も基礎的な現象である交換密度流問題を取り上げ、本解析手法の有効性の検討を行った。

2 基礎方程式

基礎方程式には、密度の不均一さが相対的に微小であると仮定して、以下に示す *Bussinesq* 近似を用いた *Navier-Stokes* の運動方程式および連続式を用いる。

$$\dot{u}_i + (u_j - \hat{u}_j) u_{i,j} + \frac{1}{\rho_0} p_{,i} - \nu (u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} = \frac{\rho}{\rho_0} f_i \quad (1)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad (2)$$

ここに、 u_i は流速成分、 $\hat{u}_i$ は節点座標の移動速度成分、 p は圧力、 $\nu = \mu/\rho_0$ は動粘性係数、 f_i は物体力、 ρ は局所密度、 ρ_0 は平均密度を表す。

3 有限要素方程式

分離型解法^[1]を用いて、時間方向に対する離散化を行うと、次式を得る。

$$\begin{aligned} p_{,ii}^{n+1} = & \frac{\rho_0}{\Delta t} u_{i,i}^n - \rho_0 (u_{j,i}^n - \hat{u}_{j,i}^n) u_{i,j}^n - \rho_0 (u_j^n - \hat{u}_j^n) u_{i,i,j}^n \\ & + \mu (u_{i,j}^n + u_{j,i}^n)_{,ij} + \rho f_{i,i}^n \end{aligned} \quad (3)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t \left\{ (u_j^n - \hat{u}_j^n) u_{i,j}^n + \frac{1}{\rho_0} p_{,i}^{n+1} - \nu (u_{i,j}^n + u_{j,i}^n)_{,j} - \frac{\rho}{\rho_0} f_i^n \right\} \quad (4)$$

ここに μ は粘性係数、 Δt は微小時間増分を表す。

(3)、(4)式に有限要素法を適用し、空間方向に対する離散化を行うと、以下に示す有限要素方程式を得る。要素としては3節点3三角形の1次要素を用いる。

$$A_{\alpha\beta i} p_{\beta}^{n+1} = -\frac{\rho_0}{\Delta t} H_{\alpha\beta i} u_{\beta i}^n - \rho_0 K_{\alpha i \beta \gamma j} (u_{\beta j}^n - \hat{u}_{\beta j}^n) u_{\gamma i}^n + \rho N_{\alpha i} f_{\alpha i}^n + \Omega_{\alpha i}^{n+1} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{\alpha\beta} u_{\beta i}^{n+1} = & \bar{M}_{\alpha\beta} u_{\beta i}^n - \Delta t \left\{ K_{\alpha\beta\gamma j} (u_{\beta j}^n - \hat{u}_{\beta j}^n) u_{\gamma i}^n - \frac{1}{\rho_0} H_{\alpha i \beta} p_{\beta}^{n+1} \right. \\ & \left. + \nu S_{\alpha i \beta j} u_{\beta j}^n - \frac{\rho}{\rho_0} N_{\alpha} f_{\alpha i}^n - \Sigma_{\alpha i} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで $M_{\alpha\beta}$ 、 N_{α} 、 $N_{\alpha i}$ 、 $K_{\alpha i \beta \gamma j}$ 、 $K_{\alpha\beta\gamma j}$ 、 $S_{\alpha i \beta j}$ 、 $A_{\alpha i \beta i}$ 、 $H_{\alpha\beta i}$ 、 $H_{\alpha i \beta}$ 、 $\Omega_{\alpha i}$ 、 $\Sigma_{\alpha i}$ は有限要素法によって導かれる係数マトリックスである。

境界条件は、次式で表される。

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{on} \quad S_1, \quad p = \hat{p} \quad \text{on} \quad S_2$$

ここで $\hat{\cdot}$ は既知量、 S_1 は壁面境界、 S_2 は自由水面境界を表す。自由水面では上式に加え、力学的境界条件より表面力、運動学的境界条件より水位変動量を与える。

5 マーカーによる密度補間

解析量域内の密度分布は、流体粒子とその性質を代表させた2種類のマーカーの位置により決定される^{[2],[3]}。k番目の要素の局所密度 ρ^k および平均密度 ρ_0 は次式で与えられる。

$$\rho^k = \frac{m_1^k \rho_1 + m_2^k \rho_2}{m_1^k + m_2^k}, \quad \rho_0 = \frac{\sum_{k=1}^M \rho^k A^k}{\sum_{k=1}^M A^k}$$

ここに m_1^k はk番目の要素内に含まれる密度 ρ_1 のマーカーの個数、 m_2^k はk番目の要素内に含まれる密度 ρ_2 のマーカーの個数、 A^k はk番目の要素の面積を表す。

マーカーの座標 x_i は、次式によって表す。

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \Delta t u_i^{n+1} \quad (7)$$

6 数値解析例

数値解析例として図1に示す水路における交換密度流の解析を行った。境界条件として水路床、側面をslip条件とした。計算条件として $\Delta t = 0.01(\text{sec})$ 、 $\rho_1 = 1.00(\text{t/m}^3)$ 、 $\rho_2 = 1.20(\text{t/m}^3)$ 、 $\nu = 0.01(\text{m}^2/\text{sec})$ とした。図2に解析結果であるマーカー分布図を示す。

混合過程の考察

隔壁解放後に、密度境界面を中心に大きく渦が発生し、高密度の流体が低密度の流体の下へ潜り込んでいる。その後、密度フロントが形成され密度界面の変動が安定してきた。これらから、定性的には交換密度流現象が再現されていることが確認できた。

密度フロントの移動特性

隔壁の解放直後の密度フロントの初期進行速度 c_0 は、通常次式で表す。

$$c_0 = K \sqrt{g' H} \quad (8)$$

ただし、 H は初期水深、 $g' = \epsilon g$ であり $\epsilon = \Delta \rho / \rho_0$ で表す。定数 K はYih^[4]の実験的研究より $K = 0.45$ であることが示されている。解析結果は $K = 0.46$ となり比較的良い一致を示した。フロントの伝播に関しては本解析手法が有効であることが確認された。

8 おわりに

本研究において密度分布をマーカーにより表現する方法を用い、交換密度流の解析を行った。定性的には密度流現象を再現することができた。今後は、実験的研究も交えて本解析手法の有効性、適用限界の検討を行うと共に、他の解析手法についても検討する予定である。

参考文献

- [1] 畑中勝守, 川原睦人: "分離型解法による自然対流有限要素解析", 第3回 数値流体力学シンポジウム
- [2] 江春波, 川原睦人, 櫻山和男: "非定常密度流れの有限要素法解析", 第19回 関東支部技術研究発表会
- [3] Chun Bo JIANG: "Analysis of Unsteady Incompressible Flows by Finite Element and Finite Volume Methods", 江春波 博士論文, (1994)
- [4] Yih, C.S: "Dynamics of nonhomogeneous fluid, Macmillan", (1965)

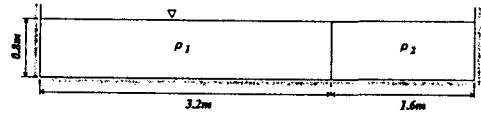


図1: 解析モデル



図2: マーカー分布図