（Ⅱ－25） 長波理論式のＡＤＩ差分計算における打ち切り誤差について

大林組　正会員○前田孝久
東海大学　正会員　後藤智明
東海大学　正会員　濱野啓造

１．はじめに

潮流や高潮の計算では，ＡＤＩ法を用いた数値計算がよく用いられる．最近，単周期の波を対象とした波浪変形の計算にも利用されるようになってきている．計算の安定性が良いこと，また他の陽解法に比べ時間ステップを大きくとることができる利点があるためであろう．

本研究では，長波理論式をＡＤＩ法で計算する場合の打ち切り誤差について検討した結果を報告する．単周期の波を対象とした計算では，分散性を有する誤差が比較的大きくなるため何らかの工夫を必要とすることを理論解析解から示す．

２．ＡＤＩ差分式のフーリエ級数展開を利用した解

線形長波の２次元平面運動を考える．水平床を仮定すると，線形長波理論式のＡＤＩ差分式は，フーリエ級数展開法を用いて厳密に解くことができる．解は，ηを水位とすると

$$\eta(x,\ y,\ t) = \Sigma\Sigma\eta_0 \exp[i\ (k_x x + k_y y)]\cdot\exp[i k C t] \tag{1}$$

となる．ここに，$k=[k_x{}^2+k_y{}^2]^{1/2}$（波数）であり，計算上の伝播速度ＣはＣ$_0$を本来の伝播速度とすると

$$\frac{C}{C_0} = \frac{\arccos[\ (1-2R_x-R_y)/\ (1+R_y)\ ]}{2[(W_x K_x)^2+(W_y K_y)^2]^{1/2}} \tag{2}$$

である．ここに，$R_x=K_x{}^2\sin^2 W_x$，$R_y=K_y{}^2\sin^2 W_y$，$W_x=K_x\Delta x/2$，$W_y=K_y\Delta y/2$，$K_x=C_0\Delta t/\Delta x$，$K_y=C_0\Delta t/\Delta y$である．また，Δx，Δyは計算の空間格子間隔そしてΔtは時間間隔である．

３．ＡＤＩ差分式の数値分散性

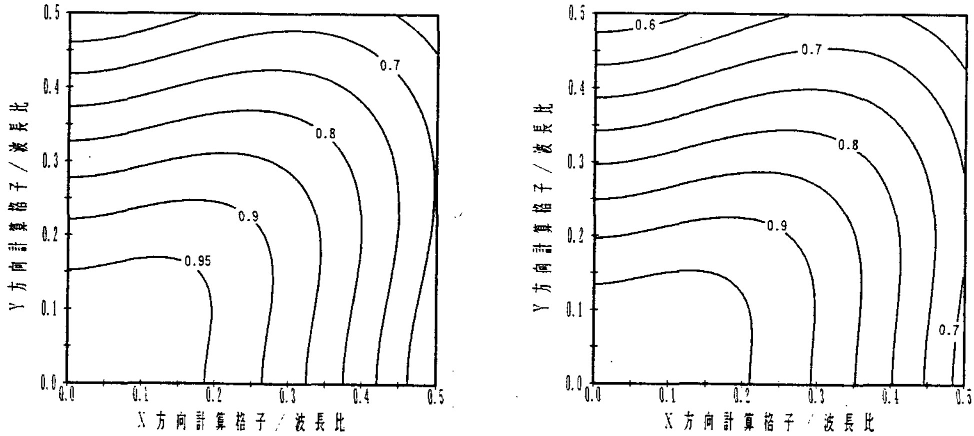
計算格子長と波長の比の違いによる計算上の波速と本来の波速の比（Ｃ／Ｃ$_0$；数値分散性を表す）を表したものが図－１である．図は，$K_x=K_y=$０．４および０．６に関するものである．両軸方向の波数分散性が大きく，45°方向が比較的弱いこと，そして各軸方向の数値分散性が異なることなどが図から判断できる．

一方，ＡＤＩ法以外によく用いられる Staggered Leap-frog 法の数値分散性を表したものが図－２である．条件は同じ $K_x=K_y=$０．４および０．６の場合である．また，図－３は，$W_x=W_y$すなわち軸と 45° なす方向へ伝播する場合の両差分法の数値分散性に関して比較したものである．これらの図の比較から，ＡＤＩ法は，Staggered Leap-frog 法に比べ大きな分散性を有することがわかる．したがって，ＡＤＩ法を用いて比較的波長の短い（厳密には，格子波長比の大きい）波の数値計算を行う際には注意を要する．

４．おわりに

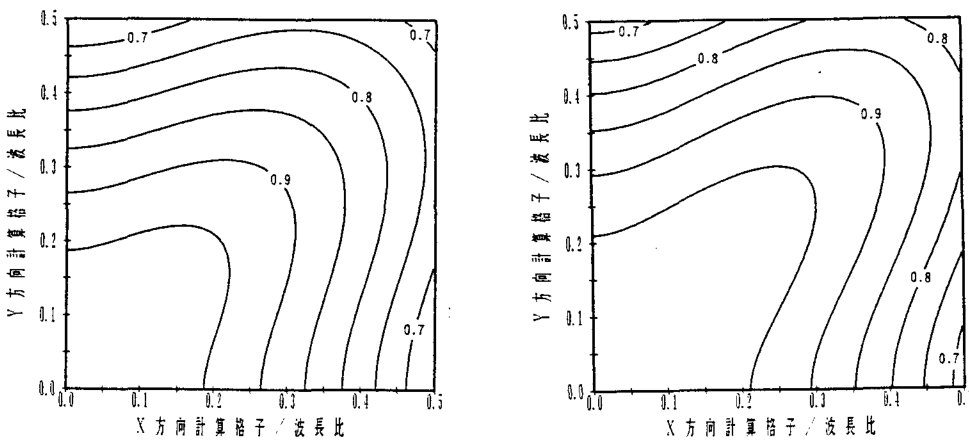
本研究では，簡単な長波理論式を用いてＡＤＩ法による数値分散性に関して検討した．他の差分法に比べ数値分散性が大きいことを理論解析解により明らかにした．ＡＤＩ法により Boussinesq 式を解くような場合には，数値的な分散性を小さく抑えるような方法もしくは理論式の有する分散性と数値的な分散性の和が本来の物理的な分散性に等しくなるような工夫（例として佐山ら(1987)の研究がある）を考える必要がある．

参考文献　佐山順二他：外海域における津波の高精度計算法に関する検討，第34回海岸工学講演会論文集，pp.177-181，1987.



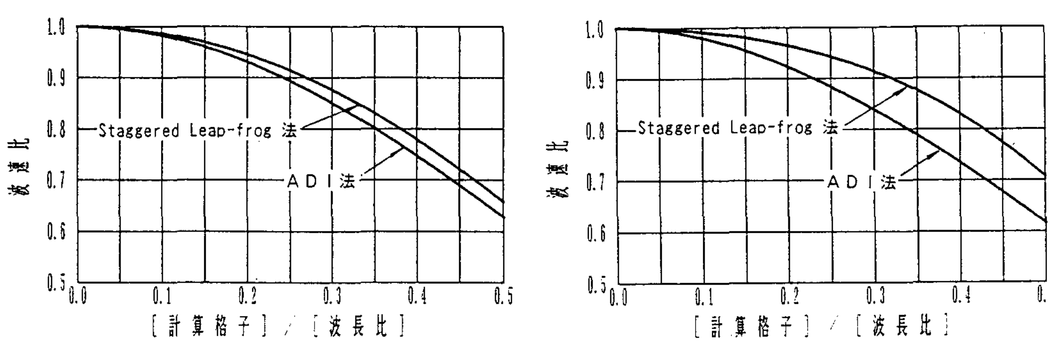
Kx=Ky=0.4　　Kx=Ky=0.6

図－１　ＡＤＩ法の数値分散性



Kx=Ky=0.4　　Kx=Ky=0.6

図－２　Staggered Leap-frog 法の数値分散性



Kx=Ky=0.4　　Kx=Ky=0.6

図－３　数値分散性に関するＡＤＩ法と Staggered Leap-frog 法の比較