（I －30）　安定理論に基づく時不変システムの安定解析

○中央大学　学員　藤野 剛
中央大学　正員　川原 睦人

1　はじめに

工学的には、システムが安定であるということは、そのシステムの挙動を考えるうえで重要なことである。もし、そのシステムの不安定性がある状態において確かめられるのであれば、そのシステムの不安定な挙動を押さえることができる。
このような目的に従って、固有値による安定性の考察とリアプノフの安定理論に基づいた考察をする。基礎方程式に対する離散化の手法には、有限要素法を用いる。

2　安定理論

本論では次式で表される工学的システムを考える。

$$\dot{x} = f(x,t) \tag{1}$$

ただし、x はn次元状態ベクトル、f はn次元ベクトル、t は時間である。(1) のような多くのシステムは、局所的に次式で近似できる。

$$\dot{x} = Ax \tag{2}$$

ただし、x はn次元状態ベクトル、A は $n \times n$ 型 非特異定数マトリックスである。これは線形時不変システムを記述している。

2.1　固有値問題

（2）式の線形時不変システムに対して、まず次の特性方程式から、固有値 λ_i を求める。

$$|A - \lambda_i I| = 0 \tag{3}$$

このうち異なった λ_i の数がj個とすると、（2）の解は次のように表すことができる。

$$x_i = \sum_{k=1}^{j} b_{ik}\ exp(\lambda_k t) \qquad (i = 1,2,3,\ldots,n) \tag{4}$$

ここで、システムが安定であるためには（4）式が指数関数であることから、実数マトリックスAのすべての固有値の実数部が負の値であることが条件となる。

2.1.1　固有値の算出

固有値の算出には、ハウスホルダーQR法を用いた。ハウスホルダー変換とは、対称行列を相似変換を用いて三重対角化するものであり、非対称行列ではHessenberg行列に変換される。このHessenberg行列に対して、QR法を用いて上三角行列に変換し、その変換された行列の対角要素が固有値となる。

2.2　リアプノフの安定理論

次にリアプノフの安定理論から安定状態を考察する。リアプノフの安定理論とは、簡単に述べるとシステムにおけるエネルギー論的考察の一般化である。システムのエネルギー表現は速度の2次形式（運動エネルギー）または、姿勢座標の2次形式（ポテンシャルエネルギー）である。リアプノフはエネルギー表現を一般化したものとして、リアプノフ関数を定義している。この関数は、

$$V(x) = x(t)^T\ P\ x(t) \tag{5}$$

と表される。この時間微分は、

$$\begin{aligned} &\dot{V}(x) \\ &= \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) \\ &= x(t)^T [A^T P + PA] x(t) \\ &= -x(t)^T Q x(t) \end{aligned} \tag{6}$$

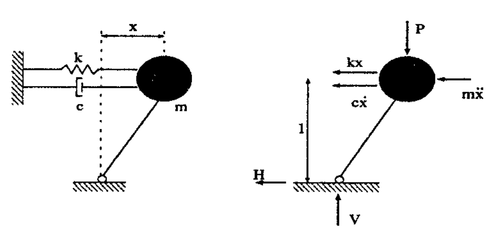
となる。はじめに Q を正定値対称行列に選ぶことにより、$\dot{V}(x)$ が負定関数となり、エネルギーの勾配が減少していると考える。次に、

$$A^T P + PA = -Q \tag{7}$$

より、正定値対称マトリックス P が存在するならば $V(x)$ は正定関数となり、エネルギーの形が正しいことが証明される。ここに出てくる $A, x(t)$ は（2）式と同様のものである。

3　数値解析例

倒立振り子　まず、数値解析例として、図－1のような倒立振り子を考える。



図－1　倒立振り子

モーメント回り方向につり合い式を立てる。

$$lm\ddot{x} + lc\dot{x} + lkx - Px = 0 \tag{8}$$

上式を書き換えると次のようになる。

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+(k-\frac{P}{l})x=0 \tag{9}$$

さらに（9）式に以下の条件を加えると次式が得られる。

$$\begin{cases} \dot{x}=x_1 \\ \dot{x_1}=x_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{(k-\frac{P}{l})}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

これは、（2）式と同様の形となる。
各係数行列を簡単化のため、全て1に固定し、荷重Pだけを変化させる。

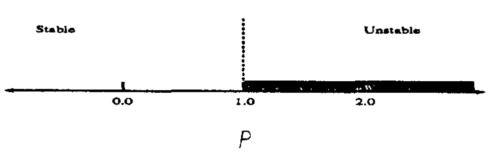
$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(1-P) & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

これにより（11）式は上のようなマトリックスを持つシステムとなり、さらに特性方程式より固有値を求める。

$$\lambda=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\mu \tag{12}$$

$$\mu=\sqrt{4P-3} \tag{13}$$

ここで固有値は、実数部が負であることが安定条件であることから、$\mu \leqq 1$が条件となり、$P \leqq 1$となる。$P=0$では、荷重がない状態であり当然安定である。次に$0<p<1$では、安定状態にある。さらに$P=1$では、ちょうど釣り合い状態であり、座屈荷重に相当する。$p>1$は限界を越えており、不安定(座屈する)状態である。このことは数値解析結果と安定理論が同じ結果になる。図－2は、解析より得られた結果である。$P=0$では、荷重がない状態であり当然安定である。次に$0<p<1$では、安定状態にある。さらに$P=1$では、ちょうど釣り合い状態であり、座屈荷重に相当する。$p>1$は限界を越えており、不安定(座屈する)状態である。このことは数値解析結果と安定理論が同じ結果になる。



図－2　倒立振り子の安定状態

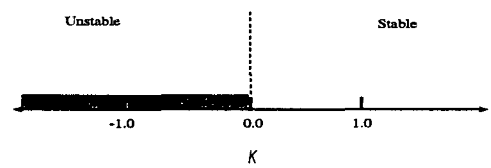
移流拡散方程式　倒立振り子の結果より理論上正しいと考え、定常の1次元移流拡散方程式に安定理論を適用してみる。拡散が不安定である状態とは拡散と逆の現象であり、物質が集まってきてしまうようなものと考えられる。そのため1次元定常問題では、常に安定であると考えられる。基礎方程式は、以下に示す方程式で記述する。

$$u\frac{\partial c}{\partial x}-\kappa\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right)=0 \tag{14}$$

ここでcは濃度、uはx方向の流速成分、κは拡散係数を表している。この方程式で外力はないものとする。
これを1次元に補間し、離散化すると、離散式は次のように表される。

$$\frac{u}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}+\frac{k}{\Delta x}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \tag{15}$$

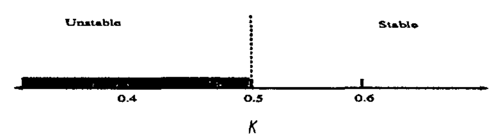
これを、5節点、4 mの1次元メッシュに適用し、$u=1(m/s)$と固定し、両端に濃度0、1を与える。拡散係数を変化させて、安定解析を行なう。境界を規定する接点の行と列は、その重ね合わせたマトリックスから抜いておく。結果を(図－3)に示す。



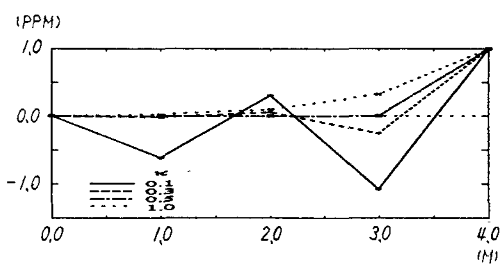
図－3　拡散係数を変化させたときの安定、不安定

4　おわりに

拡散方程式の場合、不安定な状態が1次元問題ではありえないと考えられる。しかし有限要素法により解析した場合、拡散係数が0.5以下(図－4)になると数値上不安定な解(図－5)が得られる。



図－4　有限要素法による数値上の安定、不安定



図－5　有限要素法による数値解

このような数値上の不安定性は、本研究の理論では現われないと考えられる。よって得られた結果は、現象の安定性を示すものといえる。今後、拡散場に対して不安定な状態を探す場合、負の拡散を起こすような外力が必要となる。このような外力は拡散方程式の連成問題などにあると考えている。今後このような問題に取り組みたいと考えている。

参考文献

ペーター C.ミューラー著　森、武宏　訳、
安定性と行列 、シュプリガー.フェアラーク東京（株）